4 SISTEMAS LINEARES E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Este capítulo visa proporcionar o embasamento teórico para a solução de sistemas de equações lineares. Aqui, a abordagem será restrita ao tipo de sistemas decorrentes de situações práticas. Mais especificamente, pretende-se apresentar de modo sucinto as ferramentas necessárias para a resolução de problemas formulados nos tópicos anteriores.

O estudo inicia com uma breve recapitulação dos conceitos de matriz e de determinante. A seguir, são apresentados alguns métodos para a solução de sistemas de equações lineares: a regra de Cramer, o escalonamento e o da matriz inversa.

4.1 MATRIZES

O conceito de matriz aparece naturalmente na formulação de muitos tipos de problemas. A vantagem é que, o equacionamento, em forma matricial (BOLDRINI, 1986), ordena e simplifica o problema, além de sugerir diretamente o método de solução.

Matriz é uma tabela ordenada de elementos, dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, os valores da tensão, resistência elétrica e corrente elétrica em três experimentos.

	Tensão (V)	Resistência (Ω)	Corrente Elétrica (A)
Experimento 1	20	5	4
Experimento 2	30	10	3
Experimento 3	40	10	4

Para conferir a intensidade da corrente elétrica medida no experimento 1, basta olhar a primeira linha e a terceira coluna.

4.1.1 Definição

Sejam dois subconjuntos

$$\mathbf{I} = \{ i \in IN \,/\, 1 \leq i \leq m \} \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = \{ j \in IN \,/\, 1 \leq j \leq n \},$$

definidos no conjunto dos números naturais IN, e o produto cartesiano entre os mesmos

$$\mathbf{I \times J} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..,(2,1),(2,2),..., (m, n)\}.$$

Chama-se (NETTO, 1973) matriz real de ordem m por n qualquer função

$$\mathbf{M: I \times J \rightarrow IR}$$

No contexto do ensino médio, somente são consideradas as matrizes reais.

4.1.2 Domínio e Conjunto-imagem

O domínio da função matriz de ordem m por n é o conjunto:

$$\mathbf{I \times J} = \{(i, j) \in IN \times IN \;/\; 1 \leq i \leq m \;,\; 1 \leq j \leq n\}.$$

O que pode variar de uma matriz para outra, quanto ao domínio, é somente a ordem, isto é, os números m e n.

O conjunto-imagem da função matriz de ordem m por n é o conjunto de elementos a_{ij} correspondentes aos pares ordenados (i,j). Para exemplificar, o par ordenado $(1,1) \rightarrow a_{11}$ e $(2,3) \rightarrow a_{23}$.

Ao se escrever o conjunto das imagens, utiliza-se uma tabela retangular, com m linhas e n colunas, de modo que cada elemento a_{ij} seja colocado na i-ésima linha e na j-ésima coluna. Por exemplo, se a matriz é de ordem 3 por 2, tem-se

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

4.1.3 Representação Genérica de uma Matriz

Deve-se lembrar que o domínio é fixo e o que varia é somente a ordem, e que esta aparece, no conjunto-imagem, como o número de linhas e de colunas. Portanto, para representar uma matriz de ordem m por n, usa-se apenas o seu conjunto-imagem, ordenado segundo m linhas e n colunas. Assim, a matriz m por n é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou, abreviadamente,

$$\mathbf{M} = (a_{ij})_{m \times n}.$$

As matrizes também podem ser representadas entre colchetes [ ] ou por barras duplas paralelas ‖ ‖.

4.1.4 Matrizes Especiais

A seguir, serão definidas algumas matrizes especiais (NETTO, 1973). Entretanto, a inversa, a cofator e a adjunta de uma matriz, serão definidas mais tarde, neste texto, após a introdução de determinante de uma matriz quadrada. É importante ressaltar que, com este material, não se pretende substituir o livro didático. Sendo assim, a fundamentação teórica, bem como os exemplos, foram limitados ao contexto do trabalho.

Matriz linha – é a matriz de ordem 1 x n, ou seja, aquela que tem apenas uma linha, isto é,

$$\mathbf{M} = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n}).$$

Matriz coluna – é a matriz de ordem m x 1, ou seja, aquela que tem apenas uma coluna, ou seja,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Matriz nula – é a matriz, cujos elementos são todos nulos, ou seja,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz quadrada – é a matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas. É referida como a matriz n x n ou, simplesmente, matriz de ordem n. A matriz quadrada de ordem 3, é representada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Os elementos a_{ij}, onde i = j, constituem a diagonal principal da matriz quadrada.

Matriz diagonal – é a matriz quadrada em que todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, os elementos $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Uma matriz diagonal de ordem 3 é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matriz identidade – é a matriz quadrada diagonal de ordem n, em que todos os elemento da diagonal principal são iguais a 1. Ou, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para i = j. A matriz identidade de ordem n é representada por

$$\mathbf{I_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz triangular superior – é a matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos abaixo de diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para i > j. Ou seja,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matriz triangular inferior – é a matriz quadrada de ordem n, em que todos os elementos acima de diagonal principal são nulos. Portanto, $a_{ij} = 0$, para i < j, e a matriz é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matriz oposta da matriz dada – é a matriz cujos elementos têm sinais opostos aos dos elementos da matriz dada. Formalmente, dada a matriz **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$, chama-se oposta de **A**, a matriz: **B** = $(b_{ij})_{m \times n}$, tal que $b_{ij} = -a_{ij}$, para todo i e para todo j. Sendo

A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, sua oposta é a matriz **B** = $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$.

Matriz Transposta - dada a matriz **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$, chama-se a transposta de **A** à matriz $\mathbf{A}^T = (a^T_{ji})_{n \times m,}$ tal que $a^T_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Isto significa que as colunas de $\mathbf{A}^T$ são ordenadamente iguais às linhas de **A.** Como exemplo, tem-se

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ e sua transposta $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4.1.5 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$ e **B** = $(b_{ij})_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e todo j. Isto significa que, para duas matrizes serem iguais, devem ser da mesma ordem e apresentar todos os elementos correspondentes iguais.

Por exemplo, são iguais as matrizes,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

4.1.6 Operações com matrizes

4.1.6.1 Adição

Dadas duas matrizes **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$ e **B** = $(b_{ij})_{m \times n}$, chama-se soma **A** + **B** a matriz **C** = $(c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j (NETTO, 1973). Isto significa que a soma de duas matrizes **A** e **B** do tipo m x n é uma matriz **C** do mesmo tipo, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em **A** e **B**. Por exemplo,

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -4 & 0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 2-1 & 3+1\\ 4-4 & 5+0 & 6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

Propriedades da Adição

A adição de matrizes do tipo m x n goza das seguintes propriedades:

i) **A** + **B** = **B** + **A** – comutatividade

ii) **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C** – associatividade

iii) **A** + **0** = **A**, onde **0** denota a matriz nula m x n

iv) **A** + (**-A**)= (**-A**) + **A**= **0.**

4.1.6.2 Produto de Matriz por um Número

Dado um número k e uma matriz **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$,chama-se matriz produto k**A** a matriz **B** = (b_{ij}) m x n, tal que $b_{ij} = ka_{ij}$ para todo i e todo j. Ou seja, multiplicar uma matriz por um número k é construir uma matriz **B** formada pelos elementos de **A** todos multiplicados por k. Como exemplo,

$$\mathbf{B} = 3\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 5 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 21 & 6\\ 15 & -9 & -6\end{pmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação da Matriz por um Número

O produto de uma matriz por um número goza das seguintes propriedades:

i) k (**A + B**) = k**A** + k**B**

ii) $(k_1 + k_2)$ **A** = k_1**A** + k_2**A**

iii) k_1 (k_2 **A**) = (k_1k_2) **A**

iv) 1. **A** = **A,** onde, **A** e **B** são matrizes do tipo m x n e k, k_1 e k_2 são números reais.

4.1.6.3 Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes **A** = $(a_{ij})_{m \times n}$ e **B** = $(b_{jk})_{n \times p}$, chama-se produto **AB** a matriz **C** = (c_{ik}) m x p, tal que cada elemento (NETTO, 1973)

$$c_{ik} = a_{i1} . b_{ik} + a_{j2} . b_{2k} + ... + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \ .$$

Considerações:

- A definição dada garante a existência do produto **AB** somente se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**, pois **A** é do tipo m x n e **B** é do tipo n x p;
- Da definição, o produto **AB** é uma matriz que tem o número de linhas de **A** e o número de colunas de **B**, pois **C** = **AB** é do tipo m x p. Por exemplo,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+16+27 \\ 28+40+54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}.$$

Propriedades do Produto de Matrizes

i) (**A** x **B**) x **C**= **A** x (**B** x **C**) – Associatividade da multiplicação

ii) (k . **A**) . **B**= **A** . (k . **B**)= k . (**A** . **B**)

iii) **A** x (**B** + **D**)= **A** x **B** + **A** x **D**; $\forall$ **A**, $\forall$ **B**, $\forall$ **D**

(B + **D**) x **C**= **B** x **C** + **D** x **C**; $\forall$ **B**, $\forall$ **C**, $\forall$ **D** (Distributividade em relação à soma).

A multiplicação de matrizes não é comutativa. Em gera,l **AB** $\neq$ **BA**. Por exemplo,

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 11 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}$$

O produto de matrizes pode ser nulo, sem que nenhuma das matrizes seja nula. Por exemplo,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2 DETERMINANTES

Toda a matriz quadrada tem, associado a ela, um número chamado determinante da matriz, obtido a partir de operações que envolvem todos os elementos da matriz (WEISS, 1978; COSTA, 1981). Uma das aplicações dos determinantes é na resolução de sistemas de equações lineares.

Determinante de Matriz Quadrada de ordem 1

Seja a matriz **M**=(a_{11}), quadrada de ordem 1. Por definição, o determinante de **M** é igual ao número a_{11}, e é denotado por det **M** = a_{11}.

Determinante de Matriz Quadrada de ordem 2

O determinante de **M,** uma matriz quadrada de ordem 2, é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Com

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ obtém-se det } \mathbf{A} = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{12} \,.\, a_{21}.$$

Determinante de Matriz Quadrada de ordem 3

Dada uma matriz quadrada de ordem 3,

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

o seu determinante é o número

det **M** = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Para facilitar o cálculo do determinante de uma matriz, procede-se do seguinte modo:

- repete-se, ao lado da última coluna da matriz, as duas primeiras colunas (ou as duas primeiras linhas abaixo da última linha);
- os termos precedidos pelo sinal positivo são obtidos multiplicando-se os elementos da diagonal principal e de suas paralelas;
- os termos precedidos pelo sinal negativo são obtidos multiplicando-se os elementos da diagonal secundária e de suas paralelas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

O cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordem maior que 3, não será objeto de estudo neste material.

Propriedades dos Determinantes

i) O determinante de uma matriz **A** é igual ao determinante de sua transposta $\mathbf{A}^T$.

ii) Se uma matriz tem uma fila de elementos nulos, o seu determinante é nulo.

iii) Ao se permutar duas filas da matriz $\mathbf{A}=(a_{ij})_n$, o determinante da nova matriz **A** muda de sinal.

iv) Se uma matriz **A** tem 2 filas iguais, o seu determinante é nulo.

v) Ao se multiplicar uma fila de uma matriz **A** por uma constante k $\in$ IR**,** o seu determinante fica multiplicado por k**.**

vi) Se **A** = **B** + **C**, então det **A** = det **B**+ det **C**.

vii) Se uma matriz **A** tem uma fila de elementos que é combinação linear de outras, então det **A**=0.

4.3 MATRIZ INVERSA

Se **A** é uma matriz quadrada de ordem n, tal que det **A** ≠ 0, a inversa de **A** é matriz denotada por $\mathbf{A}^{-1}$, e tal que $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ é inversível, det } \mathbf{A} \neq 0, \text{ e } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pois}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n$$

A matriz quadrada inversível é dita uma matriz não-singular; e, quando não inversível (det **A** = 0), é dita singular.

4.3.1 Cálculo da Matriz Inversa usando determinantes

Antes do cálculo propriamente dito, faz-se necessário introduzir o conceito de menor complementar e de cofator de um elemento de uma matriz; e, em seqüência, a definição de matriz cofator e de matriz adjunta.

4.3.1.1 Menor Complementar

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem n ≥ 2, denomina-se o menor complementar do elemento a_{ij} ao determinante D_{ij} associado à matriz quadrada que se obtém da matriz **A,** ao se suprimir a linha e a coluna do elemento a_{ij} considerado. Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

tem-se que o menor complementar do elemento a_{21} é o determinante obtido suprimindo-se a segunda linha e a primeira coluna

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 50 + 3 = 53.$$

4.3.1.2 Cofator de um elemento

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem n ≥ 2, denomina-se o cofator do elemento a_{ij} de **A** ao número real $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$. Para exemplificar, se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix},$$

decorre que $D_{21} = 53$, e o cofator deste elemento é

$$A_{21} = (-1)^{2+1} 53 = -53.$$

4.3.1.3 Matriz Cofator

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem n $\geq$ 2, denomina-se a matriz dos cofatores de **A** (indica-se cof (**A**), à matriz obtida com a substituição de todos os elementos de **A** pelos seus respectivos cofatores).

Assim, dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

os cofatores de seus elementos são dados por

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

Repetindo-se o procedimento para os nove elementos, obtém-se

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -2 \\ -14 & -17 & 13 \\ 18 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

4.3.1.4 Matriz Adjunta

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem n $\geq$ 2, denomina-se a matriz adjunta de **A** (indica-se adj **A**), à matriz transposta da matriz dos cofatores.

$$\text{adj}\ \mathbf{A} = \text{cof}(\mathbf{A})^{T}$$

Como exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{cof}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & -2 \\ -14 & -17 & 13 \\ 18 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \text{adj}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -14 & 18 \\ 18 & -17 & 4 \\ -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}.$$

4.3.1.5 Cálculo da Matriz Inversa

Dada uma matriz **A** quadrada de ordem n $\geq$ 2, se **A** é inversível, então

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{adj}\,\mathbf{A} \,/\, \det \mathbf{A}.$$

Usando-se a matriz anterior

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -14 & 18 \\ 18 & -17 & 4 \\ -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 50$$

e a sua inversa é

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 6 & -14 & 18 \\ 18 & -17 & 4 \\ -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}.$$

4.4 SISTEMAS LINEARES

4.4.1 Introdução

A modelagem de problemas reais, como os experimentados nos capítulos dois e três, conduz a um sistema de equações lineares. Pelo fato de serem reais e apresentarem soluções que podem ser medidas, estes fazem parte dos sistemas ditos possíveis e determinados. O objetivo desta secção é, portanto, estudar alguns métodos para resolver esta classe de sistemas lineares.

4.4.2 Equações Lineares

De modo geral, denomina-se equação linear (WEISS, 1978) a toda equação que pode ser escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

na qual: $a_1, a_2, ..., a_n$ – são números reais chamados coeficientes das incógnitas; $x_1, x_2, ..., x_n$ – são as incógnitas; b – é o termo independente. Por exemplo,

- $3x + 2y = 7$ é uma equação linear de incógnitas x e y;
- $2x + 3y - 2z = 10$ é uma equação linear de incógnitas x, y e z;
- $x - 5y + z - 4t = 0$ é uma equação linear de incógnitas x, y, z e t.

4.4.2.1 Solução das Equações Lineares

Dada a equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

a seqüência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é a solução da equação se, e somente se,

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b.$$

Por exemplo, considere-se a equação

$$3\,x + 2\,y = 18.$$

O par ordenado (4,3) é uma solução da equação, pois 3 (4) + 2 (3) = 18. Ao passo que o par (5,1) não é uma solução, pois $3(5) + 2(1) \neq 18$.

Para a equação

$$3\,x + y - 2\,z = 8,$$

tem-se que o terno ordenado (2,4,1) é solução, pois verifica identicamente a equação, ou seja, 3 (2) + (4) – 2 (1) = 8; o terno ordenado (5, -2, 3) não é solução, porque $3\,(5) + (-2) - 2\,(3) \neq 8$.

4.4.3 Sistemas de Equações Lineares

O conjunto **S** de m (m≥1) equações lineares (GUELLI, 1980) a n incógnitas é dito um sistema linear m x n, e é representado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Como exemplos, tem-se o sistema linear 2 x 2, nas incógnitas x e y,

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10; \end{cases}$$

e, o sistema linear 3 x 3 nas incógnitas x, y e z dado por

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y + z = 8 \end{cases}$$

4.4.3.1 Solução de um sistema linear

Diz-se que a ênupla ou o conjunto ordenado de n números (α_1, α_2,..., α_n) é solução de um sistema de equações lineares, quando é solução de cada uma das equações do sistema. O par ordenado (5, 1) é solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$$

E, o terno ordenado (1, 3, -2) é solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x - y - z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

4.4.3.2 Classificação de Sistemas Lineares

Os sistemas lineares são classificados como possíveis ou impossíveis.

- Possíveis – são aqueles sistemas lineares que possuem solução.
  - Determinado – a solução é única.
  - Indeterminado – possui infinitas soluções.
- Impossíveis – são aqueles que não possuem solução.

4.4.3.3 Solução de sistemas lineares n x n ($n \geq 2$), usando a regra de Cramer

Neste trabalho, serão considerados apenas os sistemas possíveis e determinados. A regra de Cramer é um método para se obter a solução de tais sistemas, usando determinantes.

Considere-se o sistema genérico de m equações com n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O determinante da matriz quadrada formada pelos coeficientes a_{ij}, i=1...m e j=1...n, das incógnitas constitui o determinante do sistema

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Substituindo os coeficientes a_{i1} pela coluna dos termos independentes b_k, k=1... m, obtém-se o determinante Dx_1, dado por

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Substituindo os coeficientes a_{i2} pela coluna dos termos independentes b_k, k=1... m, obtém-se o determinante Dx_2, ou seja,

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & b_m & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Repetindo-se este processo para as colunas a_{ij}, j=3...n, decorrem os determinantes Dx_3, ..., Dx_n

A solução do sistema de equações lineares é obtida dividindo-se cada um desses determinantes pelo determinante do sistema. Portanto,

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{Dx_2}{D}$$

.

.

.

$$x_n = \frac{Dx_n}{D}.$$

Por exemplo, o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$$

tem como resultado de seus determinantes

$$D = 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = -4 - 1 = -5$$
$$Dx = 7 \cdot (-4) - 1 \cdot 2 = -28 - 2 = -30$$
$$Dy = 1 \cdot (2) - 7 \cdot 1 = 2 - 5 = -5.$$

E, como valores das incógnitas, decorre

$$x = -30 / -5 = 6 \ \text{ e } \ y = -5 / -5 = 1.$$

4.3.3.4 Solução de sistemas lineares de ordem n x n com o método do escalonamento

Diz-se que dois sistemas lineares $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ são equivalentes se, e somente se, possuem a mesma solução. Assim, um sistema linear qualquer pode ser transformado em um sistema equivalente mais simples, para o cálculo de suas soluções.

A forma escalonada é uma representação mais simples do sistema linear. Para determiná-la, efetua-se operações elementares sobre as linhas do sistema, tais como:

i) a multiplicação dos termos de uma equação qualquer de um sistema linear **S**, por um numero real $c \neq 0$, produz o sistema **S'** equivalente a **S**;

ii) a substituição de uma equação qualquer de um sistema linear **S**, pela adição de seus termo com os correspondentes de uma outra, conduz a um sistema **S**' equivalente a **S**.

O cálculo da forma escalonada é, freqüentemente, mencionado na literatura (STRANG, 1980) como o método da eliminação Gaussiana.

Escalonamento de um sistema

Um sistema é colocado na forma escalonada (BOLDRINI, 1986), seguindo-se vários passos baseados nas operações elementares anteriores, isto é:

i) coloca-se como primeira equação aquela em o coeficiente da primeira incógnita for diferente de zero;
ii) anula-se o coeficiente da primeira incógnita de todas as equações, exceto da primeira, substituindo-as pela sua soma com a primeira equação multiplicada por um número conveniente;
iii) mantém-se fixa a primeira equação e aplica-se os passos i) e ii) nas equações restantes até o sistema ficar escalonado.

Por exemplo, no sistema

$$\begin{cases} x + 2y + \quad z = 9 \\ 2x + y - \quad z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases},$$

ao se substituir a segunda equação pela sua soma com a primeira multiplicada por -2, vem

$$\begin{cases} x + 2y + z = \quad 9 \\ \quad - y - 3z = -15 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}.$$

Substituindo-se a terceira equação pela sua soma com a primeira multiplicada por -3, obtém-se

$$\begin{cases} x + 2y + \quad z = \quad 9 \\ \quad -3y - 3z = -15 \\ \quad -7y - \quad 5z = -31 \end{cases}.$$

E, multiplicando-se a segunda equação por -1/3, segue que

$$\begin{cases} x + 2y + \quad z = \quad 9 \\ \qquad y + z \quad = -15 \\ \quad -7y - 5z = -31 \end{cases}.$$

Com a troca da terceira equação pela sua soma com a segunda multiplicada por 7, resulta o sistema escalonado

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ \quad\;\; y + z = 5 \\ \qquad\; 2z = 4 \end{cases}$$

A sua solução é obtida facilmente, isto é,

z = 2, y = 3 e x = 1.

4.4.3.5 Solução de sistemas lineares com a matriz inversa

Considere-se o sistema linear de ordem n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Este pode ser escrito na forma da equação matricial a seguir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Assim, resolver o sistema, equivale a resolver a equação matricial

A X = **B**, que tem por solução **X** = $\mathbf{A^{-1}}$ **B**

Para ilustrar este procedimento, seja o sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

A equação matricial a ser resolvida é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como det A = 10 e a transposta da matriz dos cofatores é

$$\textbf{Adj A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -4 & -10 & 8 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

E, da definição $\mathbf{A^{-1}} = \dfrac{1}{\det A} AdjA$, segue que

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -4 & -10 & 8 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a matriz solução do sistema é dada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}}\ \mathbf{B} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ -4 & -10 & 8 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

E, os valores correspondentes às variáveis são

$$x = 2, \quad y = 3 \quad \text{e} \quad z = -1$$

4.4 CÁLCULO DO POSTO DE UMA MATRIZ ATRAVÉS DE DETERMINANTES

Algumas vezes, pode-se verificar se um sistema de equações lineares tem solução sem precisar resolvê-lo (BOLDRINI, 1986). Por exemplo, pode-se estar interessado em saber se duas retas, dadas pelas equações y-2x=3 e y-3x=2, se interceptam, ou não, sem determinar seu ponto de intersecção. Em outras palavras, deseja-se verificar se o sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$$

admite ou não solução.

A existência e o número de solução estão relacionados com o posto da matriz **A** dos coeficientes e o posto da matriz ampliada. O posto característico de uma matriz (quadrada ou não) pode ser determinado com o cálculo dos determinantes sucessivos de suas submatrizes quadradas. Este é dado pela ordem da submatriz de **A** de maior ordem possível, com determinante não nulo.

A seguir, são apresentados dois exemplos para o cálculo do posto de uma matriz.

Exemplo 1: Dada a matriz de ordem 4 x 5

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & -15 & 19 & 14 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 25 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

As suas cinco submatrizes de ordem 4 têm determinante nulo. O mesmo acontece com as suas submatrizes (em número de 40) de ordem 3. Mas, por sorte, na primeira tentativa com as submatrizes de ordem 2, tem-se

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Então, o posto de **A** é 2.

Exemplo 2: Verificar se o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ 6x - 3y - 3z = -1 \end{cases},$$

é possível ou não, sem resolvê-lo.

A matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

tem determinante nulo, pois a terceira linha é igual à segunda multiplicada por -3. Portanto, o posto de **A** é menor que 3. (Se o **det A** $\neq 0$, o posto seria 3, pois **A** é submatriz dela mesma). Como o determinante da submatriz de ordem 2, obtida suprimindo-se a terceira linha e terceira coluna, isto é,

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

a matriz **A** tem uma submatriz quadrada de ordem 2, com determinante diferente de zero; portanto, o posto de **A** é 2.

Considere-se, agora, a matriz obtida adicionando-se a coluna dos termos constantes do sistema à matriz original do sistema, ou seja, a matriz ampliada

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sendo o determinante da submatriz obtida com as três últimas colunas de **B** dado por

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

o posto da matriz **B** é 3. Conclui-se, assim, que o sistema não tem solução, pois o posto da matriz dos coeficientes é diferente do posto da matriz ampliada.