5 INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

As inequações lineares, bem como os sistemas de inequações simultâneas, são bastante úteis na solução de problemas de várias áreas do conhecimento (CAIXETA-FILHO, 2001). Neste contexto, é comum se perguntar pelos valores máximo ou mínimo de uma função, cujas variáveis estão sujeitas a certas restrições (desigualdades). Aqui, a função que se quer otimizar é uma função linear, submetida a restrições lineares, portanto, trata-se de um problema de programação linear.

A **programação linear** é definida como sendo o conjunto de técnicas matemáticas, com as quais pode ser determinada uma solução ótima para um problema que apresenta várias soluções. Consiste num método interativo que determina a melhor combinação de valores que as variáveis do modelo, obedecendo a certas restrições, podem assumir a fim de otimizar a solução.

5.1 O MÉTODO GRÁFICO

Frente a um problema de programação linear (WEISS, 1978), considera-se as seguintes orientações para resolvê-lo:

1- Deve ser estabelecida a **função objetivo**, ou seja, a função a ser otimizada;
2- As restrições impostas pelo problema devem ser transformadas em inequações lineares;
3- A seguir, traça-se o gráfico do polígono convexo (região plausível) correspondente a essas restrições, e determinam-se as coordenadas de seus vértices;
4- Calcula-se o valor da função objetivo em cada um dos vértices;
5- O maior valor determinado é o máximo e o menor valor é o mínimo.
6- Volta-se ao problema e apresenta-se a solução.

Sistema de inequações lineares, exemplo:

Uma indústria produz dois tipos de artigos, **A** e **B**. Na venda do artigo **A,** tem um lucro de R$ 20,00 por unidade e na venda do artigo **B**, um lucro de R$ 30,00. A máquina que produz o artigo **A** consome 1 **kwh** de energia por unidade produzida e pode produzir até 60 unidades por período. A máquina que produz o artigo **B** também consome 1 **kwh** de energia por unidade e pode produzir no máximo 50 unidades por período. A potência instalada só permite um consumo de 100 **kwh**. Quantas unidades de cada artigo a indústria deverá produzir, supondo que todas as unidades sejam vendidas, a fim de que o lucro seja máximo?

Solução:

Considere-se:

x = artigos do tipo **A**, y = artigos do tipo **B**

e a função objetivo

$$L(x,y) = 20\,x + 30\,y.$$

Restrições:

Consumo máximo de energia 100 **kwh**: $x + y \leq 100$;

Capacidade máxima de produção do artigo **A** 60 unidades: $x \leq 60$;

E, do artigo **B,** produção máxima 50 unidades: $y \leq 50$

Assim, decorre o sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \leq 60 \\ y \leq 50 \end{cases}$$

Solução gráfica:

As restrições, acima, dão origem ao polígono da região plausível (Figura 28) limitado pelas retas

x + y =100, x = 60 e y = 50.

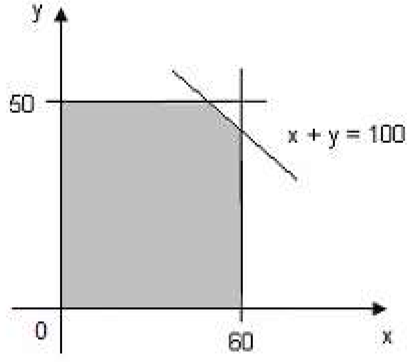

Figura 28: Gráfico da Região Plausível

As coordenadas dos vértices do polígono são obtidas com a resolução dos sistemas de inequações correspondentes aos lados do mesmo, e geram (tabela 11) os valores da função objetivo.

Tabela 11: Valor da função objetivo nos vértices

Vértice	**Valor de L = 20 x + 30 y**	
(0, 0)	0	Mínimo
(0, 50)	1500	***
(50, 50)	2500	Máximo
(60, 40)	2400	***
(60, 0)	1200	***

Conclui-se que a indústria deverá fabricar 50 unidades de cada artigo e, com a venda total, alcançará um lucro de R$ 2500,00.

5.2 O MÉTODO SIMPLEX

O algoritmo **simplex** é um processo iterativo para determinar as soluções básicas viáveis (WILLIAMS, 1978; WEISS, 1978) para um sistema de equações e testá-las quanto a otimicidade. A sua aplicação envolve as etapas descritas a seguir.

A primeira etapa consiste na transformação do sistema de desigualdades em um sistema de equações, através das variáveis de folga (falta ou excesso), segundo o procedimento: para a restrição menor (<) adiciona-se a variável de folga e, para a maior (>), subtrai-se a variável de folga.

Na segunda etapa, constrói-se (tabela 12) o quadro simplex. Neste procedimento, os ($\mathbf{C_j}$) coeficientes da função objetivo, os coeficientes das variáveis nas equações ($\mathbf{A_{ij}}$) e os termos independentes ($\mathbf{B_i}$) são transferidos de maneira ordenada para uma tabela.

Na coluna $\mathbf{C_b}$, estão os coeficientes $\mathbf{C_j}$ das variáveis básicas, que são nulos na solução básica inicial.

Tabela 12: Quadro simplex

C_b	C_j	C_1	C_2	C_3	....	C_n	S
	Base	X_1	X_2	X_3	....	X_n	X_1
0	x_{n+1}	A_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}	b_1
0	x_{n+2}	A_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}	b_2
....	....	....	....	....	....	....	....
0	x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mn}	b_n

A terceira etapa visa determinar a solução. Para tanto, em cada iteração será determinada uma nova solução (outro ponto extremo) e, para isso, é necessário realizar a troca de base (valor numérico da variável).

A escolha da variável que deve entrar na base é feita pela regra simplex 1, e da que deve sair pela regra simplex 2, descritas a seguir.

- **REGRA SIMPLEX 1**

A seleção da variável que entra na base depende dos valores dos coeficientes da função objetivo. Para a maximização, é escolhido o menor entre os coeficientes negativos na linha da função objetivo. Se todos os valores forem positivos, a solução já é ótima. Para minimização, a variável selecionada será aquela que apresentar o maior entre os coeficientes negativos na linha da função objetiva. Se todos os valores forem positivos, a solução já é ótima.

- **REGRA SIMPLEX 2**

A seleção da variável que deve deixar a base é feita diante do valor obtido pelo quociente entre os números da coluna solução ($\mathbf{b_i}$) e os coeficientes $\mathbf{A_{ij}}$ da coluna da variável que entrar na base. É selecionada a linha com a menor razão (as razões com denominador zero ou negativo são ignoradas) e a variável desta linha deve deixar a base. Cabe observar que esta regra é válida para o processo de maximização e minimização.

A quarta etapa consiste no pivotamento. Este processo envolve a obtenção da matriz dos coeficientes das variáveis básicas na forma da matriz identidade. Como somente uma variável básica entra na tabela a cada iteração, o cálculo da matriz identidade é completado com as operações elementares sobre as linhas da matriz. Mais especificamente, busca-se obter um coeficiente unitário na posição do elemento pivô e zeros nas demais posições desta coluna.

O problema solucionado anteriormente pelo método gráfico também será resolvido com o método simplex, a seguir.

Como antes, tem-se o problema de maximizar a função objetivo

$$L = 20x + 30y,$$

sujeita às restrições:

$$x + y \leq 100,\ x \leq 60 \quad \text{e} \quad y \leq 50,$$

que produzem o sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \leq 60 \\ y \leq 50 \end{cases}$$

Acrescentando-se as variáveis de folga z_1, z_2 e z_3, e igualando a função objetivo a zero, transforma-se o sistema de inequações acima em um sistema de equações algébricas,

$$L - 20x - 30y = 0 \quad \text{(função objetiva)}$$

$$\begin{cases} x + z_1 = 60 \\ y + z_2 = 50 \\ x + y + z_3 = 100 \end{cases}$$

As variáveis x, y, z_1, z_2 e z_3 são números inteiros positivos, e são classificadas como:

Variáveis não básicas: x e y

Variáveis básicas: z_1, z_2 e z_3

A solução básica inicial, obtida no sistema atribuindo-se os valores x = 0, y = 0 para as variáveis não básicas , é $z_1 = 60$, $z_2 = 50$ e $z_3 = 100$

O problema é resumido no quadro simplex (tabela 13).

Tabela 13: Solução inicial

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
base	1	-20	-30	0	0	0	0
z_1	0	1	0	1	0	0	60
z_2	0	0	1	0	1	0	50
z_3	0	1	1	0	0	1	100

Observa-se que há coeficientes negativos na linha da função objetivo, portanto, esta solução não é ótima. Pelos critérios, estabelecidos acima, a variável a entrar na base é y (correspondente ao menor valor negativo, situado na coluna Y) e a variável a sair (tabela 14) da base (o menor quociente entre a coluna b e as colunas Z) é z_2 correspondente a 50/1.

Tabela 14: Primeira troca de variáveis na base

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
Base	1		0	0		0	
z_1	0		0	1		0	
y	0		1	0		0	
z_3	0		0	0		0	

Agora, deve-se completar a tabela 14 em função da tabela 13 (tabela 15). Para não alterar as equações, é necessário aplicar às outras colunas as mesmas operações efetuadas na coluna Y**.** Ou seja, repetem-se as linhas (1) e (2). A seguir (tabela 12), a linha (2) deve ser multiplicada por –1 e somada à linha (3); e, a linha (2) deve ser multiplicada por 30 e somada à linha (0).

Tabela 15: Solução intermediária

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
Base	1	-20	0	0	30	0	1500
z_1	0	0	0	1	0	0	60
y	0	0	1	0	1	0	50
z_3	0	1	0	0	0	1	50

Como há um coeficiente negativo na função objetivo, a solução ainda não é ótima. Então, pelos critérios estabelecidos acima, a variável a entrar na base é x e a variável (Tabela 16) que deve sair é z_3.

Tabela 16: Segunda troca de variáveis na base

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
Base	1	0	0	0			
z_1 y x	0 0 0	0 0 1	0 1 0	1 0 0			

Como antes, precisa-se completar a tabela 16 em função da tabela 15, obtendo-se a tabela 17. Também, para não alterar as equações, é necessário aplicar às outras colunas as mesmas operações efetuadas na coluna X. Assim, repetem-se as linhas (2) e (3), sendo que a linha (3) deve ser multiplicada por –1 e somada à linha (1); e, a linha (3) deve ser multiplicada por 20 e somada à linha (0).

Tabela 17: Solução final

	L	X	Y	Z_1	Z_2	Z_3	B
base	1	0	0	0	30	20	2500
z_1	0	0	0	1	0	-1	10
y	0	0	1	0	1	0	50
x	0	1	0	0	0	1	50

Com a leitura dos dados (lê-se os valores não nulos nas colunas X,Y das variáveis e o valores associados na coluna B) na tabela 17, resulta (pelo fato de que não há valores negativos na linha da função objetivo) a solução ótima com os valores x = 50 e y = 50, e a função objetiva é L = 2500. Isto significa, que devem ser fabricadas 50 unidades de cada item e que o lucro máximo a ser alcançado é de R$ 2500,00.

Em seqüência, a solução do problema é obtida com a planilha de cálculo Excel. Aqui, os passos a serem seguidos são os mesmos utilizados na resolução analítica do problema em questão. Inicialmente, os coeficientes das equações são dispostos nas células da planilha (quadro 1 – figura 29). Usando-se os critérios fixados nas regras simplex 1 e 2, é feita a troca das variáveis: sai a variável y e entra a variável z_2 (quadro 2 – figura 29). Para completar o quadro 2 em função do quadro 1, com os comandos **Editar-Copiar** e **Editar –Colar,** repetem-se as linhas (1) e (2). A linha (3) é substituída pelo produto da linha (2) por – 1 somado à linha (3), conforme o comando **= - 1 * B4 + B5.** E, a linha (0), pelo produto da linha (2) por 30 somado à linha (0), com o comando **= 30 * B4 + B2** (quadro 3 – figura 29).

Repete-se o procedimento para se obter o quadro 4 – figura 29. Agora, sai a variável x e entra a variável z_1, as linhas (2) e (3) são repetidas. A linha (1) é substituída pelo produto da linha (3) por –1 somado com a linha (1), com o comando **= - 1 * B19 + B17**. A linha (0) é trocada pelo produto de (3) por 20 somado a (0), com o comando **= 20 * B19 + B16**. E, finalmente, a solução ótima é obtida (quadro 4 – Figura 29).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		L	x	y	z1	z2	z3	b	
2	base	1	-20	-30	0	0	0	0	0
3	z1	0	1	0	1	0	0	60	1
4	z2	0	0	1	0	1	0	50	2
5	z3	0	1	1	0	0	1	100	3
6					quadro 1				
7									
8		L	x	y	z1	z2	z3	b	
9	base	1		0	0		0		0
10	z1	0		0	1		0		1
11	y	0		1	0		0		2
12	z3	0		0	0		1		3
13					quadro 2				
14									
15		L	x	y	z1	z2	z3	b	
16	base	1	-20	0	0	30	0	1500	0
17	z1	0	1	0	1	0	0	60	1
18	y	0	0	1	0	1	0	50	2
19	z3	0	1	0	0	0	1	50	3
20					quadro 3				
21									
22		L	x	y	z1	z2	z3	b	
23	base	1	0	0	0	30	20	2500	0
24	z1	0	0	0	1	0	-1	10	1
25	y	0	0	1	0	1	0	50	2
26	x	0	1	0	0	0	1	50	3
27					quadro 4				
28									

Figura 29: Solução pelo método simplex usando a planilha Excel

6 SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES COM O USO DA PLANILHA ELETRÔNICA

A informática está cada vez mais presente nas salas de aula. A sua incorporação (HEATINGER, 2003) gradual, nas atividades desenvolvidas pelo professor, tem alcançado um papel de destaque no ensino em todos os níveis.

O computador, utilizado como um facilitador (LEVY, 1993) do processo de ensino e aprendizagem, e o desenvolvimento de novos softwares, específicos ou adaptáveis para esta área, são temas constantes de análise e discussões em eventos.

A planilha é um aplicativo usado para cálculos em geral que admite ser programada para a resolução de problemas singulares. Em particular, neste capítulo, a planilha Microsoft Excel é utilizada na solução de sistemas de equações lineares com a regra de Cramer.

6.1 PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

Como exemplo, deve-se resolver o sistema de equações lineares 3 x 3 dado por

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

A rotina, para o cálculo com a regra de Cramer, é desenvolvida em 4 etapas, a saber:

Passo 1: Abrir a planilha de cálculo (Figura 30)

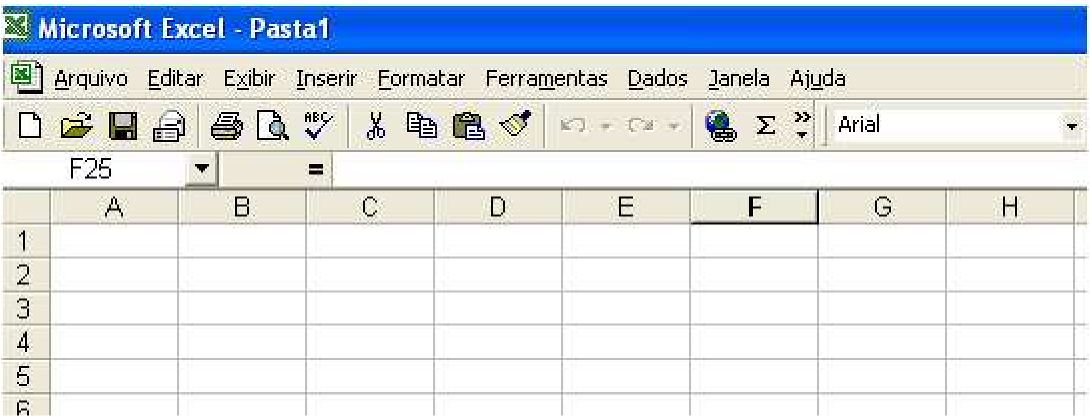

Figura 30: Planilha de cálculo Excel

Passo 2: Colocar os coeficientes das incógnitas nas células

	A	B	C	D
1	a1	b1	c1	d1
2	a2	b2	c2	d2
3	a3	b3	c3	d3
4				

Figura 31: Coeficientes nas células da planilha

Passo 3: Calcular o determinante da matriz dos coeficientes, escrevendo a regra de Sarrrus na célula B 5.

B5 = =(A1*B2*C3+A3*B1*C2+A2*B3*C1)-(A3*B2*C1+A2*B1*C3+A1*B3*C2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a1	b1	c1	d1					
2	a2	b2	c2	d2					
3	a3	b3	c3	d3					
4									
5	delta	#VALOR!							

Figura 32: Cálculo do determinante da matriz

1- Substituir a coluna dos coeficientes da incógnita x, pela coluna dos termos independentes, para calcular o determinante da incógnita x, escrevendo a regra de Sarrus na célula **B 6**. Mais precisamente,

delta x = (D1*B2*C3+D3*B1*C2+D2*B3*C1)- (D3*B2*C1+D2*B1*C3+D1*B3*C2), como mostra a figura 33.

B6 = =(D1*B2*C3+D3*B1*C2+D2*B3*C1)-(D3*B2*C1+D2*B1*C3+D1*B3*C2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a1	b1	c1	d1					
2	a2	b2	c2	d2					
3	a3	b3	c3	d3					
4									
5	delta	#VALOR!							
6	delta x	#VALOR!							

Figura 33: Cálculo do determinante da incógnita x

2- Substituir a coluna dos coeficientes da incógnita (veja figura 34), pela coluna dos termos independentes, para calcular o determinante da incógnita y, escrevendo a regra de Sarrus na célula **B 7**. Mais precisamente,

delta y = (A1*D2*C3+A3*D1*C2+A2*D3*C1)- (A3*D2*C1+A2*D1*C3+A1*D3*C2), como mostra a figura 34.

B7 = =(A1*D2*C3+A3*D1*C2+A2*D3*C1)-(A3*D2*C1+A2*D1*C3+A1*D3*C2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a1	b1	c1	d1					
2	a2	b2	c2	d2					
3	a3	b3	c3	d3					
4									
5	delta	#VALOR!							
6	delta x	#VALOR!							
7	delta y	#VALOR!							

Figura 34: Cálculo do determinante da incógnita y

3- Substituir a coluna dos coeficientes da incógnita **z**, pela coluna dos termos independentes, para calcular o determinante da incógnita **z**, escrevendo a regra de Sarrus na célula **B 8**. Mais precisamente,

delta z= (A1*B2*D3+A3*B1*D2+A2*B3*D1)- (A3*B2*D1+A2*B1*D3+A1*B3*D2), como na figura 35.

B8 = =(A1*B2*D3+A3*B1*D2+A2*B3*D1)-(A3*B2*D1+A2*B1*D3+A1*B3*D2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a1	b1	c1	d1					
2	a2	b2	c2	d2					
3	a3	b3	c3	d3					
4									
5	delta	#VALOR!							
6	delta x	#VALOR!							
7	delta y	#VALOR!							
8	delta z	#VALOR!							

Figura 35: Cálculo do determinante da incógnita z

Passo 4- Determinar os valores das incógnitas x, y e z, dividindo os valores dos respectivos determinantes pelo valor do determinante da matriz dos coeficientes, escrevendo nas células **B10**, **B11** e **B12** os quocientes **B6/B5**, **B7/B5** e **B8/B5**.

B10 = =B6/B$5

	A	B	C	D
1	a1	b1	c1	d1
2	a2	b2	c2	d2
3	a3	b3	c3	d3
4				
5	delta	#VALOR!		
6	delta x	#VALOR!		
7	delta y	#VALOR!		
8	delta z	#VALOR!		
9				
10	x	#VALOR!		
11	y	#VALOR!		
12	z	#VALOR!		

Figura 36: Cálculo das incógnitas

Como exemplo, usando a rotina desenvolvida, resolver o sistema de equações, abaixo, gerado pelo circuito da figura 2.15, da seção 2.7.3 deste trabalho.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 \qquad + i_3 = -1 \\ \quad - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}$$

Para tanto, basta dar entrada aos coeficientes do sistema, inserindo-os nas células pré-definidas na planilha de cálculo obtida no passo 4.

	A	B	C	D	E
1	1	1	-1	0	
2	1	0	1	-1	
3	0	-1	-1	0	
4					
5	delta	3			
6	delta x	-2			
7	delta y	1			
8	delta z	-1			
9					
10	x	-0,6667			
11	y	0,3333			
12	z	-0,3333			
13					

Figura 37: Uso da planilha na solução de um sistema linear

A leitura dos valores das incógnitas é feita nas correspondentes células das colunas **A** e **B**. Assim, a solução do sistema é a terna x= -2/3, y= 1/3 e z= -1/3.

Para determinar a solução de qualquer outro sistema 3x3, pela regra de Cramer, é suficiente digitar os dados do sistema na planilha final (passo 4).