Representação em Fasores

Os fasores são uma maneira mais simples de se analisar circuitos lineares excitados por fontes senoidais (circuitos CA). Eles podem ser definidos como:

O fasor é um número complexo, na forma polar, que representa a amplitude e a fase de uma senóide.

Esse tipo de representação parte da identidade de Euler que define:

$$e^{\pm j\phi} = cos\phi \pm jsen\phi$$

Assim, cos(Φ) é a parte real e sen(Φ) é a parte imaginária. Dessa forma, para obter o fasor correspondente a uma senoide, primeiramente é preciso expressar a senoide na forma de cosseno (para que ela seja parte real do número complexo que vem da identidade de Euler). Ao eliminar o fator de tempo $e^{j\omega t}$, a senoide que estava no domínio do tempo passa a ser do domínio de fasores.

$$\underbrace{v(t) = V_m cos(\omega t + \phi)}_{\text{Domínio do tempo}} \Rightarrow \underbrace{V = V_m \angle \phi}_{\text{Domínio dos fasores}}$$

Já para senoides escritas em termos de seno, o fasor correspondente é:

$$\underbrace{v(t) = V_m sen(\omega t + \phi)}_{\text{Domínio do tempo}} \Rightarrow \underbrace{V = V_m \angle \phi - 90^{\circ}}_{\text{Domínio dos fasores}}$$

A representação gráfica dos fasores é chamada de **diagrama fasorial**. Na Figura 1, temos a representação de dois fasores: $V_m\angle\Phi$ e $I_m\angle\text{-}\theta$.

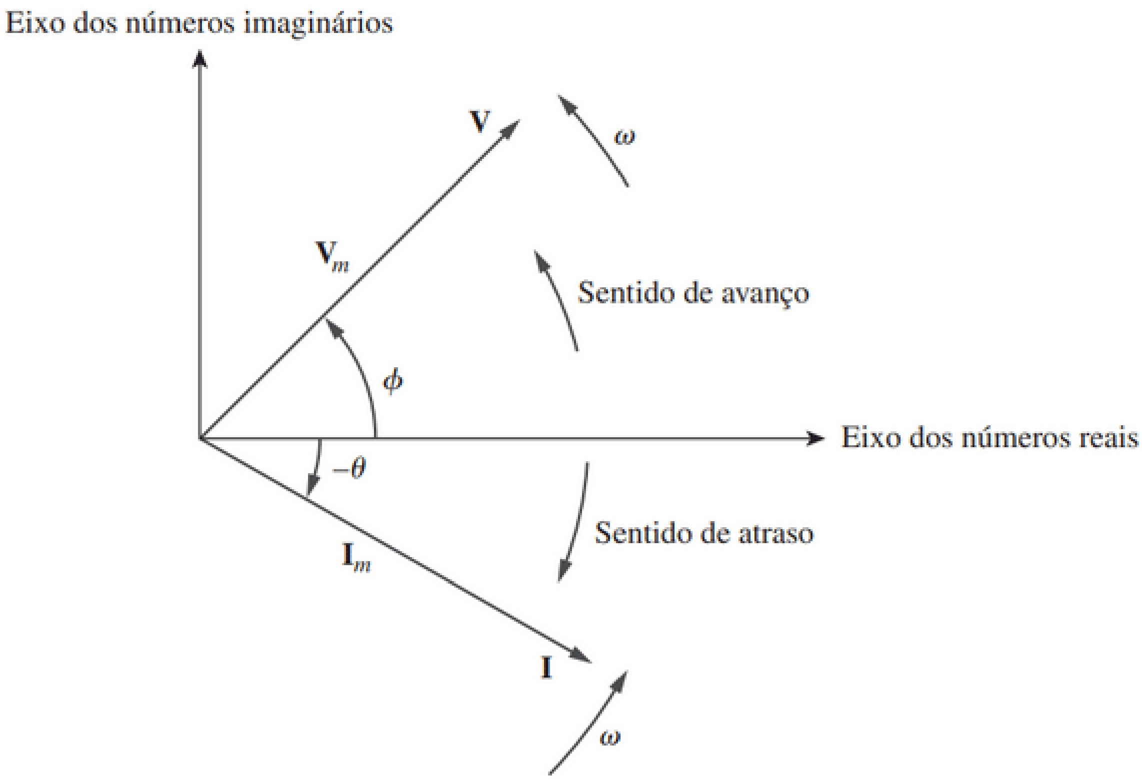

Figura 1 – Um diagrama fasorial mostrando $V_m\angle\Phi$ e $I_m\angle-\theta$
Fonte: ALEXANDER (2013).

É importante frisar que embora o **fator de frequência** (ou de tempo) $e^{j\omega t}$ seja omitido e a frequência não seja mostrada na representação no domínio dos fasores, essa resposta depende de ω. Por conta disso, o domínio dos fasores também é chamado de **domínio da frequência.**

Outro importante entendimento a respeito de fasores é como as operações com as senoides são representadas no domínio da frequência.

Começando com a derivada, derivar v(t) equivale a multiplicar seu fasor por jω.

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow j\omega V$$

Domínio do tempo **Domínio dos fasores**

Já a integral, no domínio dos fasores e equivale a dividir seu fasor correspondente por jω.

$$\int v\,dt \Leftrightarrow \frac{V}{j\omega}$$

Domínio do tempo Domínio dos fasores

Além da diferenciação e integração do tempo, outra importante operação que pode ser realizada entre fasores é na adição de senoides. Mas é importante ressaltar que essa adição só pode ser realizada se eles tiverem a mesma frequência.

Para fixar o que foi discutido neste tópico, vamos enfatizar as principais diferenças entre *v(t)* e *V*.

- v(t) é a **representação instantânea** ou no **domínio do tempo**, já V é a **representação em termos de frequência** ou no **domínio dos fasores;**
- v(t) depende do tempo, V não depende;
- v(t) é sempre real (não possui parte imaginária), enquanto V normalmente é complexo;
- A análise de fasores se aplica apenas quando a frequência é constante;
- Só podemos manipular dois ou mais sinais senoidais se eles estiverem na mesma frequência.

Exemplos

Para aplicar a representação em fasores vamos fazer duas conversões:

$$i = 6cos(50t - 40^{o})A$$
$$v = -4sen(30t + 50)V$$

Começando com o exemplo i, faremos a conversão explicitando o fator do tempo para desconsiderá-lo ao converter:

$$i = 6cos(50t - 40^{o})A$$
$$I = 6e^{-j40^{o}} = 6\angle -40^{o}$$

No caso de v, será feita a seguinte consideração:

$$-senA = cos(A + 90^o)$$

Logo:

$$v = -4sen(30t + 50^o) = 4cos(30t + 50^o + 90^o) = 4cos(30t + 140^o)$$
$$V = 4e^{j140^o} = 4\angle 140^o$$

Fasores e Elementos de Circuitos

Entendido que podemos representar tensão e corrente no domínio da frequência, também é válido indicar que esse conceito também é aplicável aos elementos passivos R, L e C dos circuitos. Nesse caso, precisamos, para cada um dos elementos, converter a relação tensão-corrente do domínio de tempo para o domínio de frequência.

Iniciando pelos resistores, se a corrente que atravessa um resistor R for:

$$i = I_m cos(\omega t + \phi)$$

Pela lei de Ohm, a sua tensão será:

$$v = iR = R \cdot I_m cos(\omega t + \phi)$$

Em termos de fasores teremos:

$$V = RI_m \angle \phi$$

Considerando que $I = I_m \angle \Phi$, temos que a a lei de Ohm continua sendo válida para o resistor no domínio dos fasores.

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$$

Para o indutor L, suponha que a corrente através dele seja:

$$i = I_m cos(\omega t + \phi)$$

A tensão no indutor é dada por:

$$v = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m sen(\omega t + \phi)$$

Utilizando a identidade trigonométrica –sen A = cos(A + 90°), reescrevemos a tensão como:

$$v = \omega L I_m cos(\omega t + \phi + 90^o)$$

Ou seja, a tensão em termos de fasores é:

$$V = \omega L I_m e^{j\phi} e^{j90^o} = \omega L I_m \angle \phi + 90^o$$

Com $I = I_m \angle \Phi$ e $e^{j90^\circ} = j$, temos:

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

Por fim, para o capacitor C, suponha que a tensão nele seja:

$$v = V_m cos(\omega t + \phi)$$

Considerando que a corrente através do capacitor seja:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Teremos que a corrente e tensão serão:

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$
$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Em resumo, para cada elemento no domínio do tempo e da frequência, temos:

Elemento	Domínio do Tempo	Domínio da frequência
R	$v = Ri$	$\mathbf{V}=R\mathbf{I}$
L	$v = L \cdot di/dt$	$\mathbf{V}=j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C \cdot dv/dt$	$\mathbf{V}=\mathbf{I}/j\omega C$