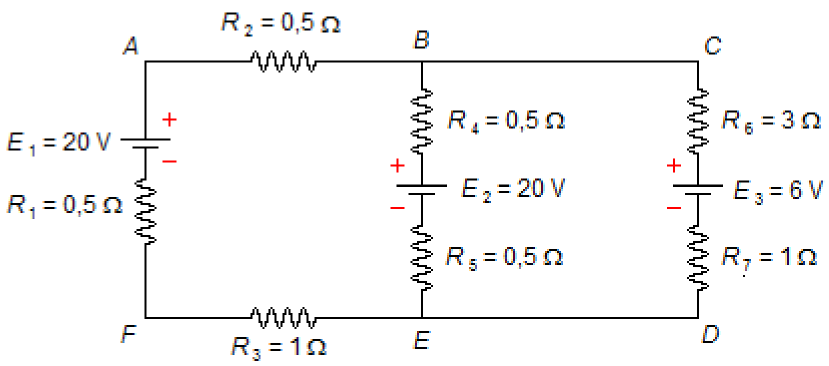
No circuito abaixo determinar as correntes nos ramos, seus verdadeiros sentidos e quais elementos são geradores e receptores.




Dados do problema

Resistores:

- $R_1 = 0,5\ \Omega$;
- $R_2 = 0,5\ \Omega$;
- $R_3 = 1\ \Omega$;
- $R_4 = 0,5\ \Omega$;
- $R_5 = 0,5\ \Omega$;
- $R_6 = 3\ \Omega$;
- $R_7 = 1\ \Omega$.

Geradores e Receptores:

- $E_1 = 20$ V;
- $E_2 = 20$ V;
- $E_3 = 6$ V.

Solução

Em primeiro lugar a cada ramo do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. No ramo *EFAB* temos a corrente $i_1$ no sentido horário, no ramo *BE* a corrente $i_2$ de *B* para *E* e no ramo *EDCB* a corrente $i_3$ no sentido anti-horário. Em segundo lugar para cada malha do circuito atribuímos um sentido, também aleatório, para se percorrer a malha. Malha $\alpha$ (*ABEFA*) sentido horário e malha $\beta$ (*BCDEB*) também sentido horário. Vemos todos estes elementos na figura 1.

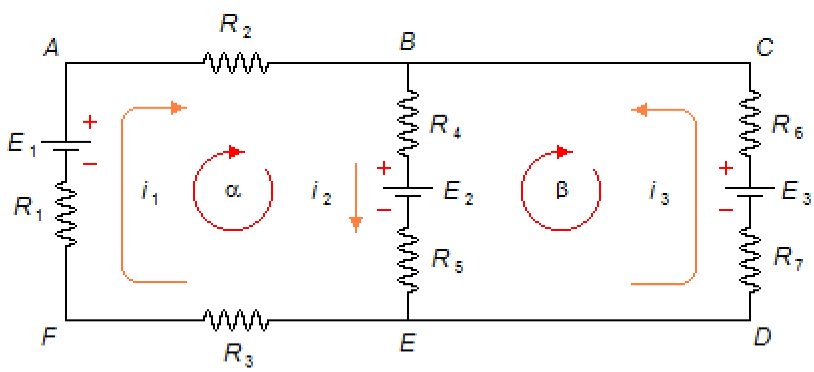



figura 1

- Aplicando a *Lei dos Nós*
  As correntes $i_1$ e $i_3$ chegam no nó *B* e a corrente $i_2$ sai dele

$$i_2 = i_1 + i_3 \tag{I}$$

- Aplicando a *Lei das Malhas*

Para a malha $\alpha$ a partir do ponto *A* no sentindo escolhido, esquecendo a malha $\beta$, (figura 2), temos

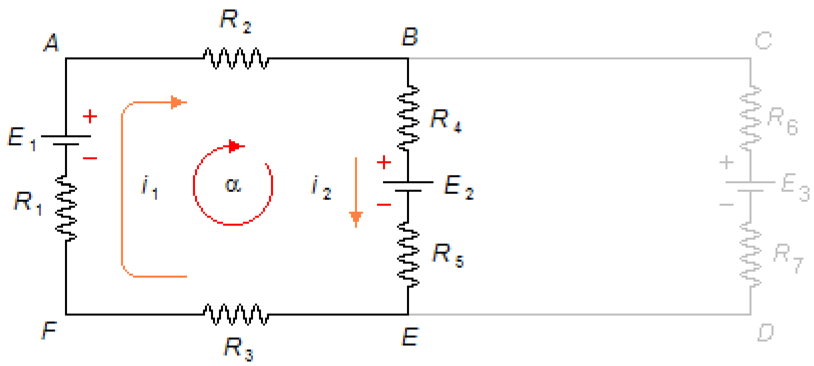



figura 2

$$R_2 i_1 + R_4 i_2 + E_2 + R_5 i_2 + R_3 i_1 + R_1 i_1 - E_1 = 0$$

substituindo os valores do problema, temos

$$0{,}5 i_1 + 0{,}5 i_2 + 20 + 0{,}5 i_2 + 1 i_1 + 0{,}5 i_1 - 20 = 0$$

$$2 i_1 + i_2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Para a malha $\beta$ a partir do ponto *B* no sentindo escolhido, esquecendo a malha $\alpha$, (figura 3), temos

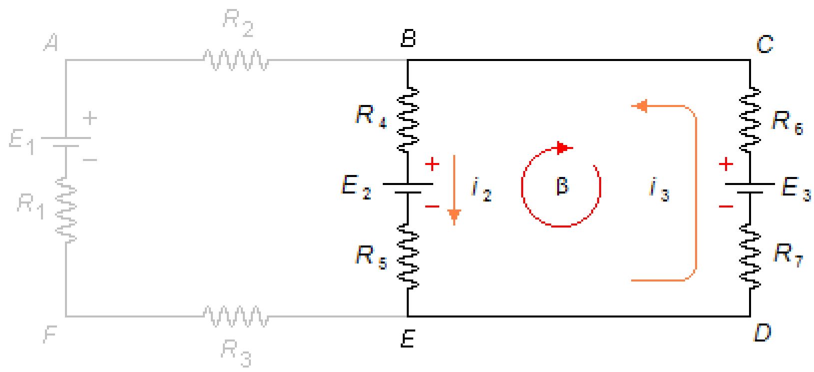



figura 3

$$-R_6 i_3 + E_3 - R_7 i_3 - R_5 i_2 - E_2 - R_4 i_2 = 0$$

substituindo os valores

$$-3 i_3 + 6 - 1 i_3 - 0{,}5 i_2 - 20 - 0{,}5 i_2 = 0$$

$$-i_2 - 4 i_3 - 14 = 0$$

$$-i_2 - 4 i_3 = 14 \qquad \text{(III)}$$

As equações (I), (II) e (III) formam um sistema de três equações a três incógnitas ($i_1$, $i_2$ e $i_3$)

$$\left|\begin{array}{l} i_2 = i_1 + i_3 \\ 2 i_1 + i_2 = 0 \\ -i_2 - 4 i_3 = 14 \end{array}\right.$$

isolando o valor de $i_1$ na segunda equação, temos

$$i_1=-\frac{i_2}{2} \tag{IV}$$

isolando o valor de $i_2$ na terceira equação, temos

$$i_3=\frac{-14-i_2}{4} \tag{V}$$

substituindo as expressões (IV) e (V) na primeira equação, obtemos

$$\begin{gathered} i_2=-\frac{i_2}{2}+\frac{(-14-i_2)}{4} \\ -i_2-\frac{i_2}{2}+\frac{(-14-i_2)}{4}=0 \end{gathered}$$

o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) entre 1, 2 e 4 é 4, então

$$\begin{gathered} \frac{-4i_2-2i_2-14-i_2}{4}=0 \\ -4i_2-2i_2-14-i_2=0.4 \\ -7i_2-14=0 \\ -7i_2=14 \\ i_2=\frac{14}{-7} \\ i_2=-2\ \text{A} \end{gathered} \tag{VI}$$

substituindo o valor (VI) encontrado acima nas expressões (IV) e (V) encontramos os valores de $i_1$ e $i_3$ respectivamente

$$\begin{gathered} i_1=-\frac{(-2)}{2} \\ i_1=1\ \text{A} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} i_3=\frac{-14-(-2)}{4} \\ i_3=\frac{-14+2}{4} \\ i_3=\frac{-12}{4} \\ i_3=-3\ \text{A} \end{gathered}$$

Como o valor das correntes $i_2$ e $i_3$ são negativas, isto indica que seus verdadeiros sentidos são contrários àqueles escolhidos na figura 1. Os valores das correntes são **$i_1$=1 A**, **$i_2$=2 A** e **$i_3$=3 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 4.

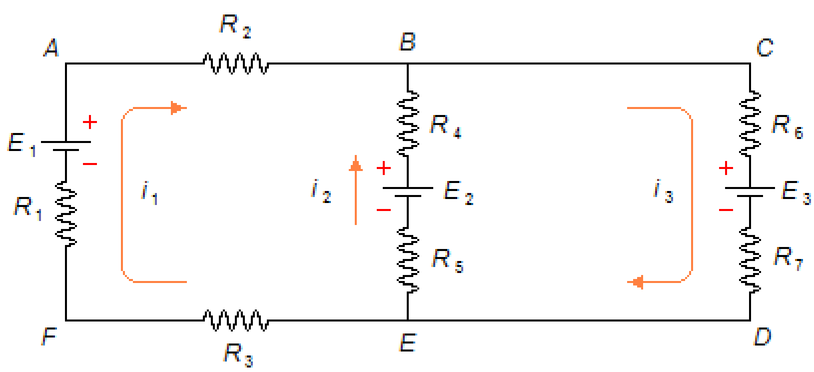
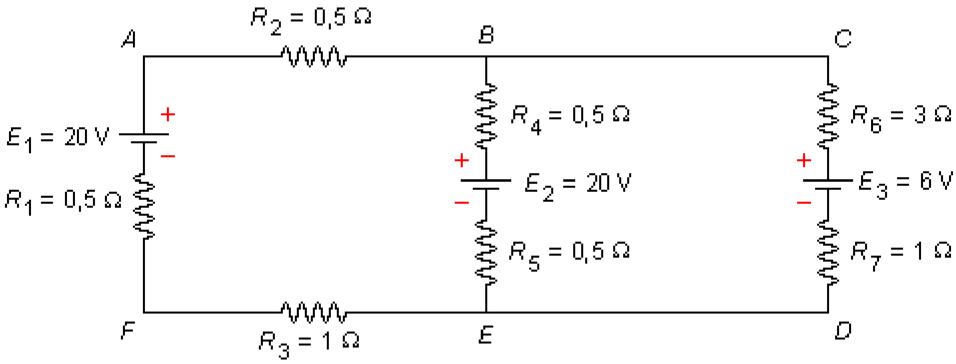



figura 4

Os **elementos $E_1$ e $E_2$ são geradores**, pois as correntes têm sentido de (-) para (+) e o **elemento $E_3$ é um receptor**, o sentido da corrente é de (+) para (-).

No circuito abaixo determinar as correntes nos ramos, seus verdadeiros sentidos e quais elementos são geradores e receptores.




Dados do problema

Resistores:

- $R_1 = 0{,}5\ \Omega$;
- $R_2 = 0{,}5\ \Omega$;
- $R_3 = 1\ \Omega$;
- $R_4 = 0{,}5\ \Omega$;
- $R_5 = 0{,}5\ \Omega$;
- $R_6 = 3\ \Omega$;
- $R_7 = 1\ \Omega$.

Geradores e Receptores:

- $E_1 = 20$ V;
- $E_2 = 20$ V;
- $E_3 = 6$ V.

Solução

Em primeiro lugar a cada malha do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. Na malha *ABEFA* temos a corrente $i_1$ no sentido horário e na malha *BCDEB* temos a corrente $i_2$ também sentido horário (figura 1)

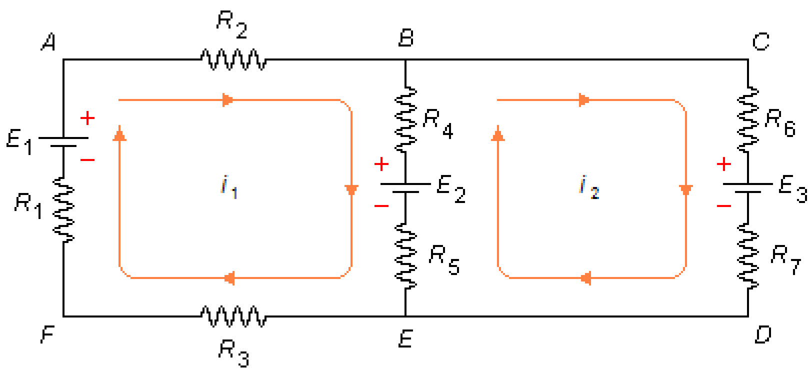



figura 1

Aplicando a *Lei das Malhas* de Kirchhoff à malha $i_1$ a partir do ponto *A* no sentindo escolhido, esquecendo a malha $i_2$ (figura 2 - a seguir), escrevemos

$$R_2 i_1 + R_4 (i_1 - i_2) + E_2 + R_5 (i_1 - i_2) + R_3 i_1 + R_1 i_1 - E_1 = 0$$

substituindo os valores do problema fica

$$0{,}5 i_1 + 0{,}5 (i_1 - i_2) + 20 + 0{,}5 (i_1 - i_2) + 1 i_1 + 0{,}5 i_1 - 20 = 0$$

$$
\begin{gathered}
0{,}5i_1+0{,}5(i_1-i_2)+0{,}5(i_1-i_2)+1i_1+0{,}5i_1=0\\
0{,}5i_1+0{,}5i_1-0{,}5i_2+0{,}5i_1-0{,}5i_2+1i_1+0{,}5i_1=0\\
3i_1-i_2=0 \qquad \text{(I)}
\end{gathered}
$$

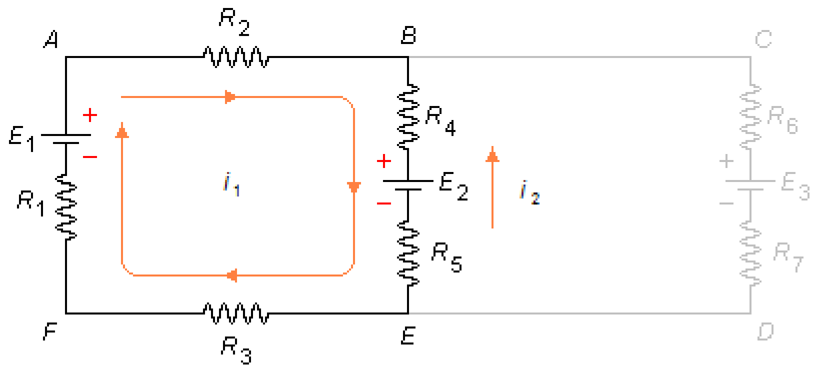



figura 2

Esquecendo a malha $i_1$ e aplicando a *Lei da Malhas* à malha $i_2$, como foi feito acima, temos pela figura 3, a partir do ponto *B*

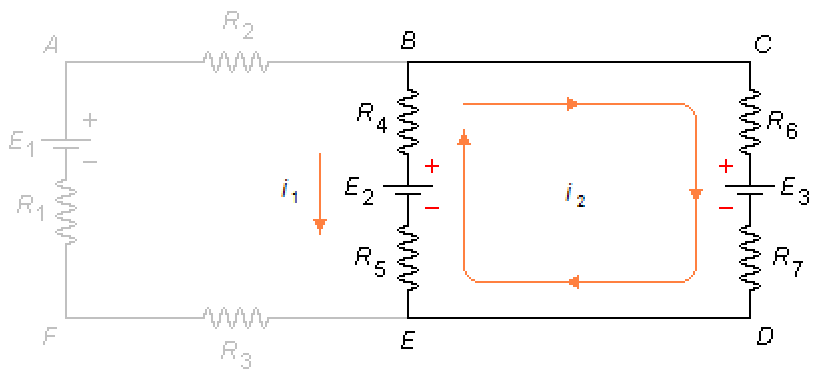



figura 3

$$
R_6i_2+E_3+R_7i_2+R_5(i_2-i_1)-E_2+R_4(i_2-i_1)=0
$$

substituindo os valores do problema fica

$$
\begin{gathered}
3i_2+6+1i_2+0{,}5(i_2-i_1)-20+0{,}5(i_2-i_1)=0\\
3i_2+i_2+0{,}5i_2-0{,}5i_1-14+0{,}5i_2-0{,}5i_1=0\\
-i_1+5i_2=14 \qquad \text{(II)}
\end{gathered}
$$

Com as equações (I) e (II) temos um sistema de duas equações a duas incógnitas ($i_1$ e $i_2$)

$$
\left|\begin{array}{l} 3i_1-i_2=0\\ -i_1+5i_2=14 \end{array}\right.
$$

isolando o valor de $i_2$ na primeira equação, temos

$$
i_2=3i_1 \qquad \text{(III)}
$$

substituindo este valor na segunda equação, obtemos

$$
-i_1+5.3i_1=14
$$

$$-i_1+15i_1=14$$
$$14i_1=14$$
$$i_1=\frac{14}{14}$$
$$i_1=1\text{ A}$$

Substituindo este valor na expressão (III), temos

$$i_2=3.1$$
$$i_2=3\text{ A}$$

No ramo *BE* vai circular uma corrente $i_3$ dada por

$$i_3=i_2-i_1$$
$$i_3=3-1$$
$$i_3=2\text{ A}$$

O sentido da corrente $i_3$ será o mesmo da corrente $i_2$ (de maior valor).
Como o valor das correntes são todos positivos, isto indica que os sentidos escolhidos na figura 1 são corretos. Os valores das correntes são **$i_1$=1 A**, **$i_2$=3 A** e **$i_3$=2 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 4.

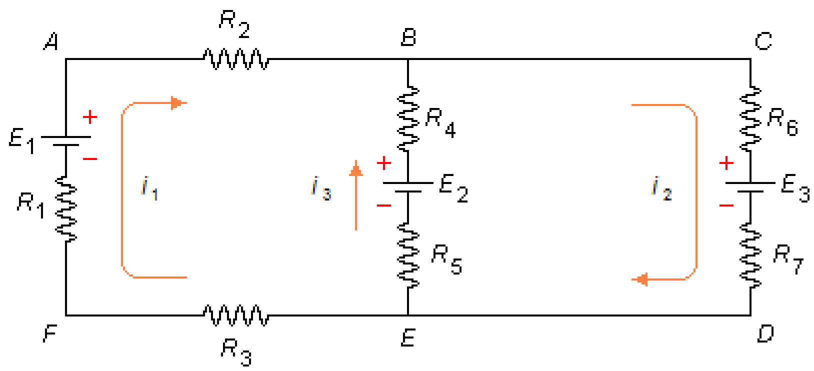
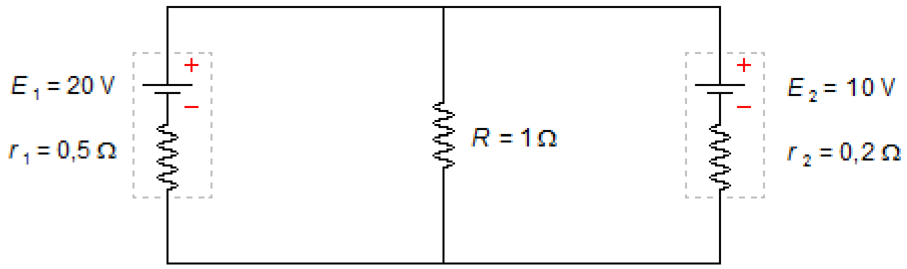



figura 4

Os **elementos $E_1$ e $E_2$ são geradores**, pois as correntes têm sentido de (-) para (+) e o **elemento $E_3$ é um receptor**, o sentido da corrente é de (+) para (-).

Duas pilhas cujas f.e.m. e resistências internas são respectivamente $E_1$ = 20 V, $E_2$ = 10 V e $r_1$ = 0,5 Ω, $r_2$ = 0,2 Ω são ligadas por fios de resistência desprezível a um resistor $R$ = 1 Ω, segundo o esquema indicado na figura. Determinar as intensidades das correntes nos diferentes trechos do circuito.




Dados do problema

Resistências das pilhas

- $r_1$ = 0,5 Ω;
- $r_2$ = 0,2 Ω

f.e.m. das pilhas

- $E_1$ = 20 V;
- $E_2$ = 10 V.

Resistência externa

- $R$ = 1 Ω.

Solução

Em primeiro lugar a cada ramo do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. No ramo *EFAB* temos a corrente $i_1$ no sentido horário, no ramo *BE* a corrente $i_3$ indo de *B* para *E* e no ramo *EDCB* a corrente $i_2$ no sentido anti-horário. Em segundo lugar para cada malha do circuito atribuímos um sentido, também aleatório, para se percorrer a malha. Malha $\alpha$ (*ABEFA*) sentido horário e malha $\beta$ (*BCDEB*) também sentido horário. Vemos todos estes elementos na figura 1

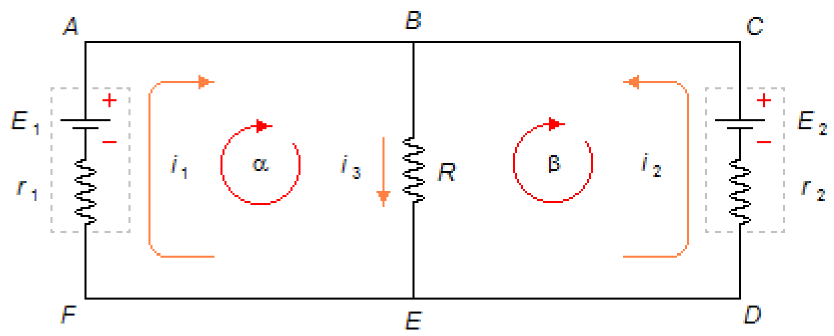



figura 1

- Aplicando a *Lei dos Nós*
  As correntes $i_1$ e $i_2$ chegam no nó *B* e a corrente $i_3$ sai dele

$$i_3=i_1+i_2 \tag{I}$$

- Aplicando a *Lei das Malhas*
  Para a malha $\alpha$ a partir do ponto *A* no sentindo escolhido, esquecendo a malha $\beta$ (figura 2), temos

$$R\,i_3+r_1\,i_1-E_1=0 \tag{II}$$

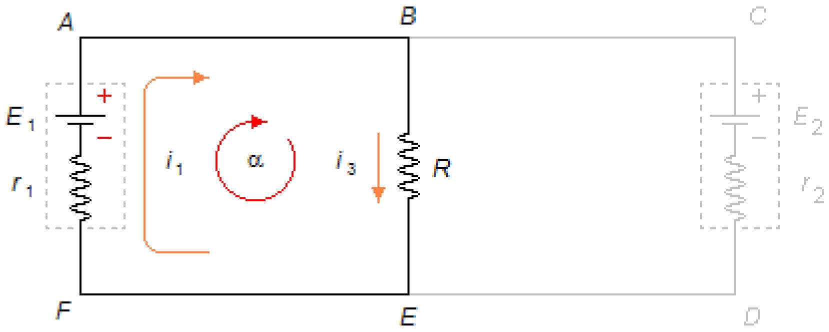



figura 2

substituindo os valores do problema, temos

$$1\,i_3+0{,}5\,i_1-20=0$$
$$i_3+0{,}5\,i_1=20 \qquad \text{(III)}$$

Para a malha β a partir do ponto *B* no sentindo escolhido, esquecendo a malha α, (figura 3), temos

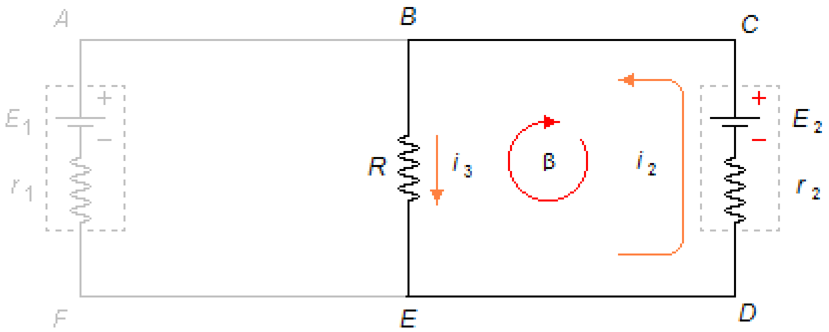



figura 3

$$E_2-r_2 i_2-R\,i_3=0 \qquad \text{(IV)}$$

substituindo os valores

$$10-0{,}2\,i_2-1\,i_3=0$$
$$0{,}2\,i_2+i_3=10 \qquad \text{(V)}$$

As equações (I), (III) e (V) formam um sistema de três equações a três incógnitas ($i_1$, $i_2$ e $i_3$)

$$\left|\begin{array}{l} i_3=i_1+i_2 \\ i_3+0{,}5\,i_1=20 \\ 0{,}2\,i_2+i_3=10 \end{array}\right.$$

isolando o valor de $i_1$ na segunda equação, temos

$$i_1=\frac{20-i_3}{0{,}5} \qquad \text{(VI)}$$

isolando o valor de $i_2$ na terceira equação, temos

$$i_2=\frac{10-i_3}{0{,}2} \qquad \text{(VII)}$$

substituindo as expressões (VI) e (VII) na primeira equação obtemos

$$i_3=\frac{20-i_3}{0{,}5}+\frac{10-i_3}{0{,}2}$$

Escrevendo na expressão acima $0{,}5=\frac{5}{10}$ e $0{,}2=\frac{2}{10}$ fica

$$i_3=\frac{20-i_3}{\frac{5}{10}}+\frac{10-i_3}{\frac{2}{10}}$$

$$i_3=\frac{10}{5}(20-i_3)+\frac{10}{2}(10-i_3)$$

$$i_3=2(20-i_3)+5(10-i_3)$$

$$i_3=40-2i_3+50-5i_3$$

$$i_3=90-7i_3$$

$$i_3+7i_3=90$$

$$8i_3=90$$

$$i_3=\frac{90}{8}$$

$$i_3=11{,}25\ \text{A}$$

substituindo o valor encontrado acima nas expressões (VI) e (VII) encontramos os valores de $i_1$ e $i_2$ respectivamente

$$i_1=\frac{20-11{,}25}{0{,}5}\qquad i_2=\frac{10-11{,}25}{0{,}5}$$

$$i_1=\frac{8{,}75}{0{,}5}\qquad i_2=-\frac{1{,}25}{0{,}5}$$

$$i_1=17{,}5\ \text{A}\qquad i_2=-6{,}25\ \text{A}$$

Como o valor da corrente $i_2$ é negativo, isto indica que seu verdadeiro sentido é contrário ao escolhido na figura 1. Os valores das correntes são **$i_1$=17,5 A**, **$i_2$=6,25 A** e **$i_3$=11,25 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 4.

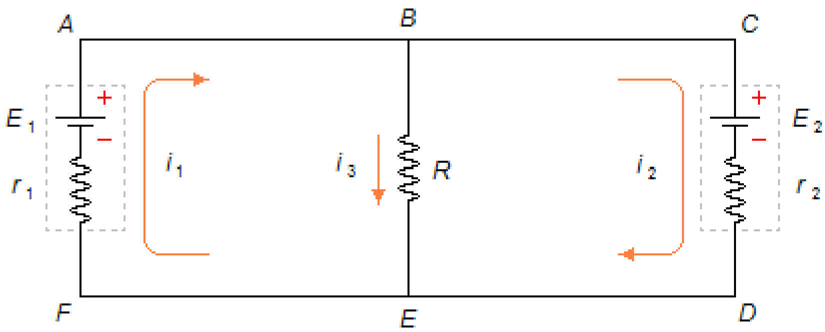
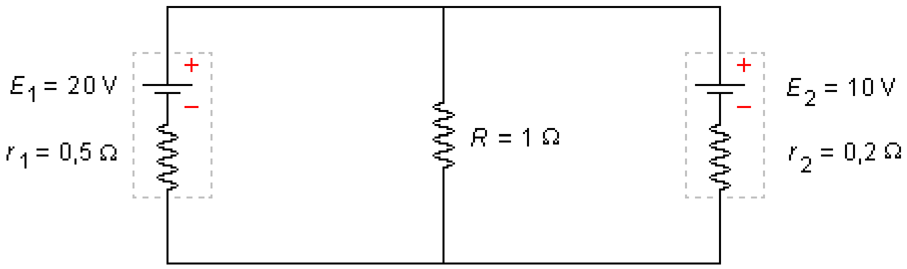



figura 4

Duas pilhas cujas f.e.m. e resistências internas são respectivamente $E_1$ = 20 V, $E_2$ = 10 V e $r_1$ = 0,5 Ω, $r_2$ = 0,2 Ω são ligadas por fios de resistência desprezível a um resistor $R$ = 1 Ω, segundo o esquema indicado na figura. Determinar as intensidades das correntes nos diferentes trechos do circuito.




Dados do problema

Resistências das pilhas

- $r_1$ = 0,5 Ω;
- $r_2$ = 0,2 Ω

f.e.m. das pilhas

- $E_1$ = 20 V;
- $E_2$ = 10 V.

Resistência externa

- $R$ = 1 Ω.

Solução

Em primeiro lugar a cada malha do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. Na malha *ABEFA* temos a corrente $i_1$ no sentido horário, e na malha *BCDEB* temos a corrente $i_2$ no sentido anti-horário (figura 1)

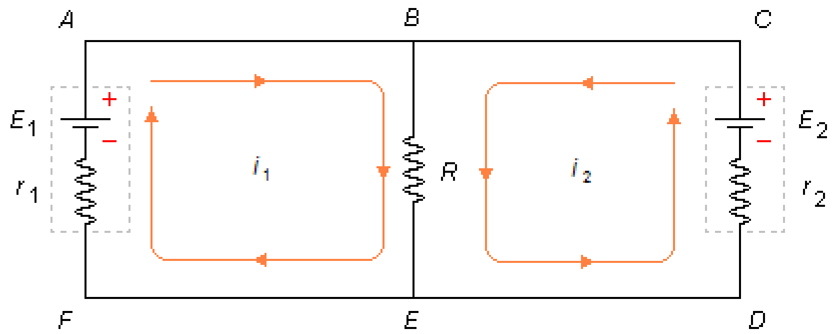



figura 1

Aplicando a *Lei das Malhas* de Kirchhoff à malha $i_1$ a partir do ponto *A* no sentindo escolhido, esquecendo a malha $i_2$ (figura 2 - a seguir), escrevemos

$$R(i_1+i_2)+r_1 i_1-E_1=0$$

substituindo os valores do problema fica

$$\begin{gathered} 1(i_1+i_2)+0{,}5\,i_1-20=0 \\ i_1+i_2+0{,}5\,i_1=20 \\ 1{,}5\,i_1+i_2=20 \end{gathered} \qquad \text{(I)}$$

Esquecendo a malha $i_1$ e aplicando a *Lei da Malhas* à malha $i_2$, como foi feito acima, temos pela figura 3, a partir do ponto *B*

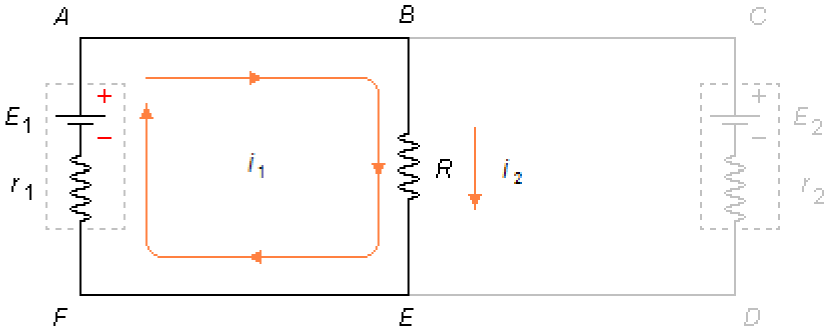



figura 2

Esquecendo a malha $i_1$ e aplicando a *Lei da Malhas* à malha $i_2$, como foi feito acima, temos pela figura 3, a partir do ponto *C*

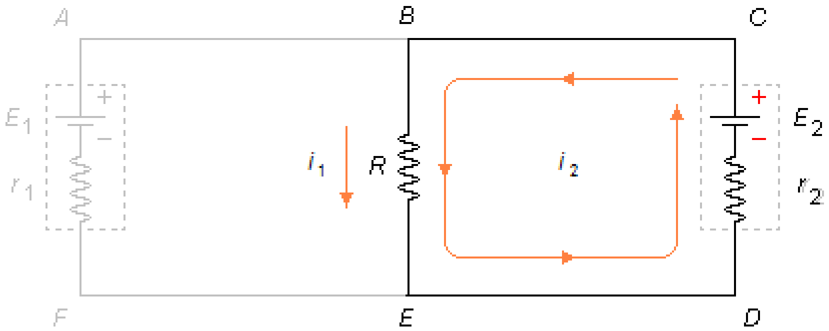



figura 3

$$R(i_1+i_2)+r_2 i_2-E_2=0$$

substituindo os valores do problema fica

$$\begin{gathered} 1(i_1+i_2)+0{,}2\,i_2-10=0\\ i_1+i_2+0{,}2\,i_2=10\\ i_1+1{,}2\,i_2=10 \end{gathered} \qquad \text{(II)}$$

Com as equações (I) e (II) temos um sistema de duas equações a duas incógnitas ($i_1$ e $i_2$)

$$\left|\begin{array}{l} 1{,}5\,i_1+i_2=20\\ i_1+1{,}2\,i_2=10 \end{array}\right.$$

isolando o valor de $i_2$ na primeira equação, temos

$$i_2=20-1{,}5\,i_1 \qquad \text{(III)}$$

substituindo este valor na segunda equação, obtemos

$$\begin{gathered} i_1+1{,}2\,(20-1{,}5\,i_1)=10\\ i_1+24-1{,}8\,i_1=10\\ 1{,}8\,i_1-i_1=24-10\\ 0{,}8\,i_1=14\\ i_1=\frac{14}{0{,}8}\\ i_1=17{,}5\ \text{A} \end{gathered}$$

Substituindo este valor na expressão (III), temos

$$i_2 = 20-1,5\,.\,17,5$$
$$i_2 = 20-26,25$$
$$i_2 = -6,25$$

No ramo *BE* vai circular uma corrente $i_3$ dada por

$$i_3 = i_1+i_2$$
$$i_3 = 17,5+(-6,25)$$
$$i_3 = 17,5-6,25$$
$$i_3 = 11,25\ \text{A}$$

O sentido da corrente $i_3$ será o mesmo da corrente $i_1$ (de maior valor).

Como o valor da corrente $i_2$ é negativo, isto indica que seu verdadeiro sentido é contrário ao escolhido na figura 1. Os valores das correntes são **$i_1$=17,5 A**, **$i_2$=6,25 A** e **$i_3$=11,25 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 4.

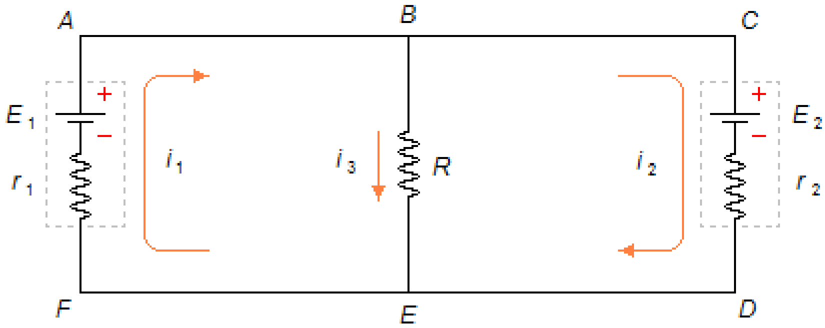
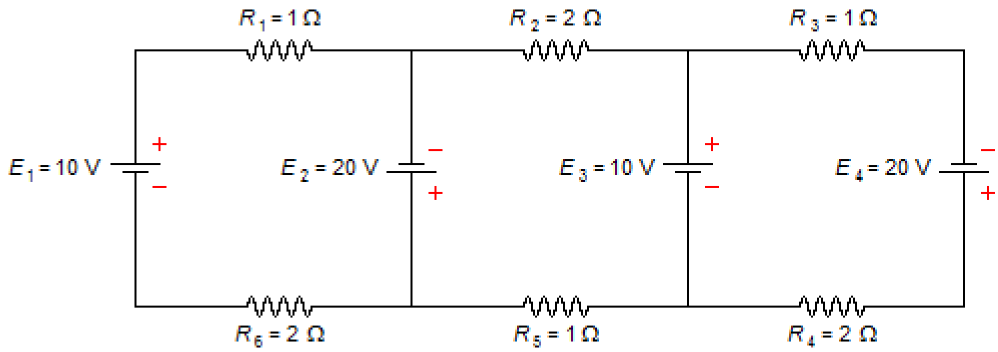


figura 4

No circuito abaixo determinar as correntes nos ramos, seus verdadeiros sentidos.




Dados do problema

Resistores

- $R_1 = 1\ \Omega$;
- $R_2 = 2\ \Omega$
- $R_3 = 1\ \Omega$;
- $R_4 = 2\ \Omega$
- $R_5 = 1\ \Omega$;
- $R 6 = 2$ □

f.e.m. das pilhas

- $E_1 = 10$ V;
- $E_2 = 20$ V.
- $E_3 = 10$ V;
- $E_4 = 20$ V.

Solução

Em primeiro lugar a cada ramo do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. No ramo *GHAB* temos a corrente $i_1$ no sentido horário, no ramo *BC* a corrente $i_2$ indo de *B* para *C,* no ramo *CDEF* a corrente $i_3$ no sentido horário, no ramo *CF* a corrente $i_4$ indo de *C* para *F*, no ramo *FG a corrente* $i_5$ indo de *F* para *G* e no ramo *BG* a corrente $i_6$ indo de *B* para *G*. Em segundo lugar para cada malha do circuito atribuímos um sentido, também aleatório, para se percorrer a malha. Malha $\alpha$ (*GHABG*), malha $\beta$ (*BCFGB*) e malha $\gamma$ (*CDEFC*) todas percorridas no sentido horário (figura 1)

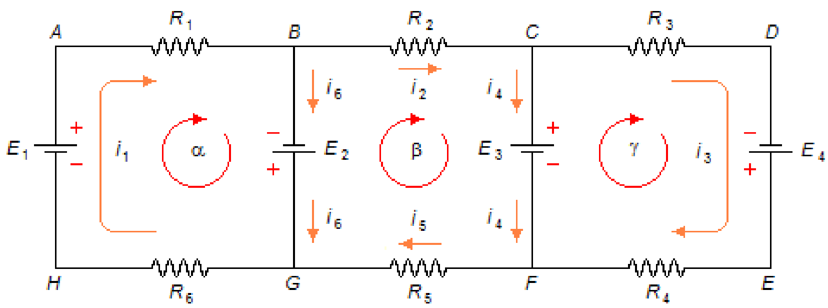



figura 1

- Aplicando a *Lei dos Nós*
  A corrente $i_1$ chega ao nó *B* e as correntes $i_2$ e $i_6$ saem dele

$$i_1 = i_2 + i_6 \qquad \text{(I)}$$

A corrente $i_2$ chega ao nó *C* e as correntes $i_3$ e $i_4$ saem dele

$$i_2 = i_3 + i_4 \qquad \text{(II)}$$

As correntes $i_3$ e $i_4$ chegam ao nó *F* e a corrente $i_5$ sai dele

$$i_5=i_3+i_4 \qquad \text{(III)}$$

- Aplicando a *Lei das Malhas*

Para a malha α a partir do ponto *A* no sentindo escolhido, esquecendo as malhas β e γ (figura 2), temos

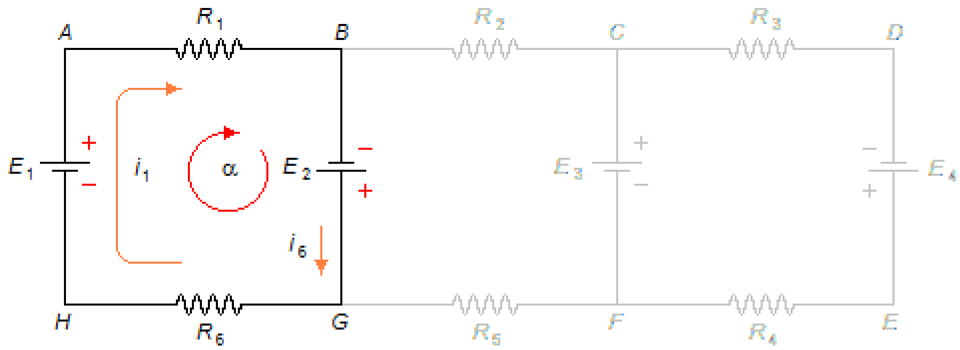



figura 2

$$R_1 i_1-E_2+R_6 i_1-E_1=0$$

substituindo os valores do problema fica

$$\begin{gathered}1 i_1-20+2 i_1-10=0\\3 i_1-30=0\\3 i_1=30\\i_1=\frac{30}{3}\\i_1=10\ \text{A}\end{gathered}$$

Para a malha β a partir do ponto *B* no sentindo escolhido, esquecendo as malhas α e γ (figura 3), temos

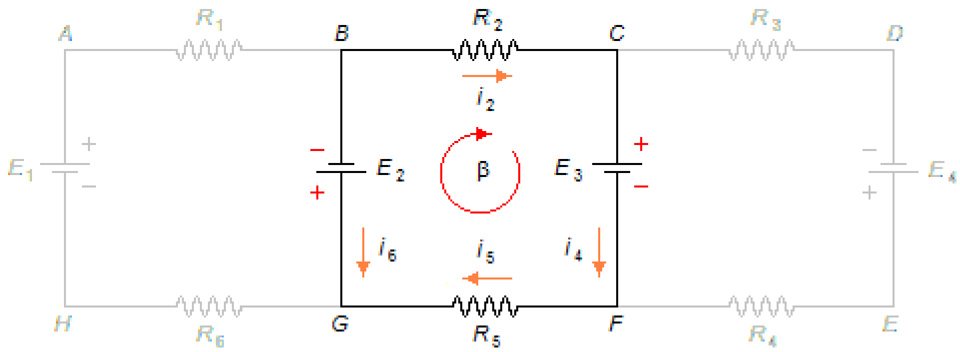



figura 3

$$R_2 i_2+E_3+R_5 i_5+E_2=0$$

substituindo os valores

$$\begin{gathered}2 i_2+10+1 i_5+20=0\\2 i_2+i_5+30=0\\2 i_2+i_5=-30\end{gathered} \qquad \text{(IV)}$$

Para a malha $\gamma$ a partir do ponto *C* no sentindo escolhido, esquecendo as malhas $\alpha$ e $\beta$ (figura 4), temos

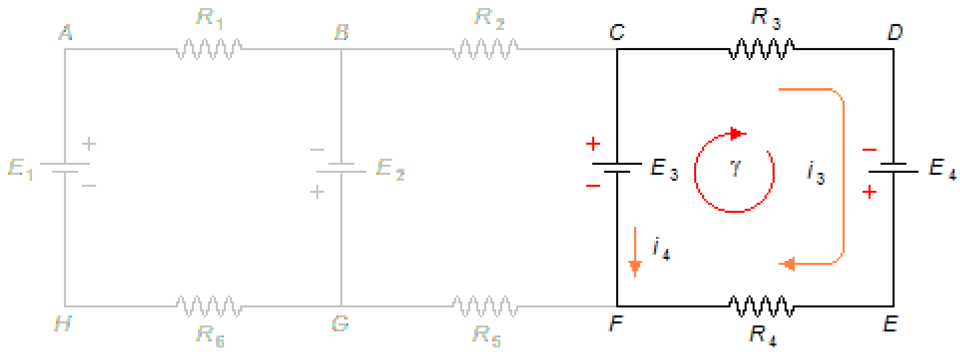


figura 4

$$R_3 i_3 - E_4 + R_4 i_3 - E_3 = 0$$

substituindo os valores

$$\begin{gathered}1 i_3 - 20 + 2 i_3 - 10 = 0\\ i_3 + 2 i_3 - 30 = 0\\ 3 i_3 = 30\\ i_3 = \frac{30}{3}\\ i_3 = 10\ \text{A}\end{gathered}$$

Substituindo os valores de $i_1$ e $i_3$ em (I), (II) e (III), temos com as equações (I), (II), (III) e (IV) um sistema de quatro equações a quatro incógnitas ($i_2$, $i_4$, $i_5$ e $i_6$)

$$\left|\begin{array}{l} i_2 + i_6 = 10\\ i_2 - i_4 = 10\\ i_5 - i_4 = 10\\ 2 i_2 + i_5 = -30\end{array}\right.$$

isolando o valor de $i_4$ na segunda equação, temos

$$i_4 = i_2 - 10 \tag{V}$$

substituindo (V) na terceira equação, obtemos

$$\begin{gathered}i_5 - (i_2 - 10) = 10\\ i_5 - i_2 + 10 = 10\\ i_5 - i_2 = 10 - 10\\ i_5 - i_2 = 0\\ i_5 = i_2 \qquad \text{(VI)}\end{gathered}$$

substituindo (VI) na quarta equação, temos

$$\begin{gathered}2 i_2 + i_2 = -30\\ 3 i_2 = -30\\ i_2 = -\frac{30}{3}\\ i_2 = -10\ \text{A}\end{gathered}$$

Assim pela expressão (VI) também temos

$$i_5=-10\ \text{A}$$

Substituindo o valor de $i_2$ na expressão (V), obtemos

$$\begin{gathered} i_4=-10-10 \\ i_4=-20\ \text{A} \end{gathered}$$

Substituindo o valor de $i_2$ na primeira equação, obtemos

$$\begin{gathered} -10+i_6=10 \\ i_6=10+10 \\ i_6=20\ \text{A} \end{gathered}$$

Como o valor das correntes $i_2$, $i_4$ e $i_5$ são negativos, isto indica que seus verdadeiros sentidos são contrários ao escolhido na figura 1. Os valores das correntes são **$i_1$=10 A**, **$i_2$=10 A, $i_3$=10 A, $i_4$=20 A, $i_5$=10 A,** e **$i_6$=20 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 5.

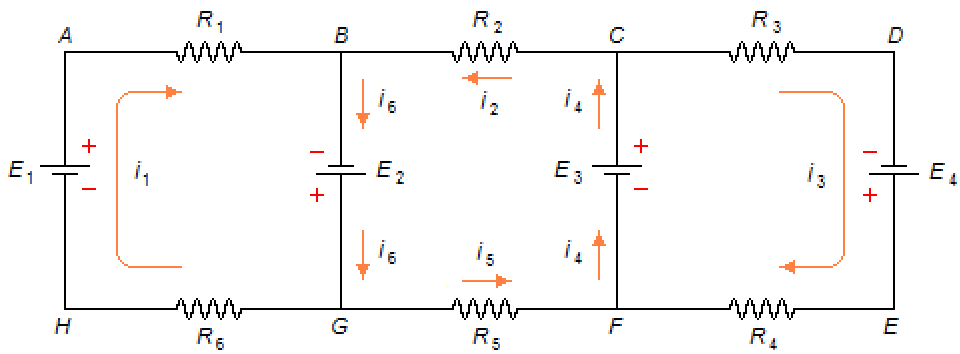
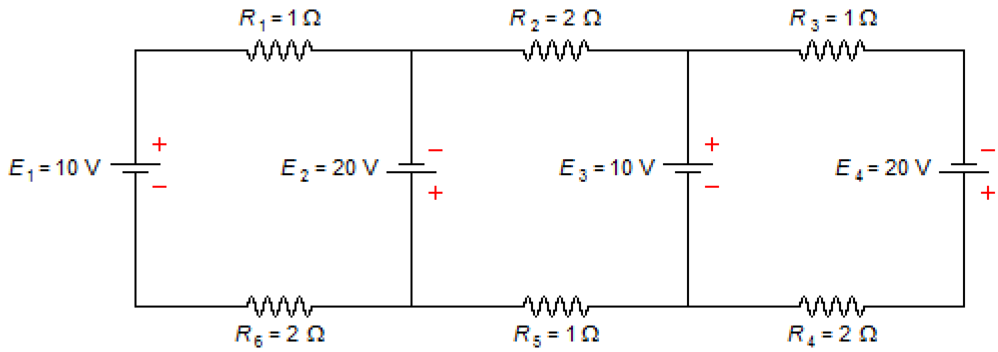



figura 5

No circuito abaixo determinar as correntes nos ramos, seus verdadeiros sentidos.




Dados do problema

Resistores

- $R_1 = 1\ \Omega$;
- $R_2 = 2\ \Omega$
- $R_3 = 1\ \Omega$;
- $R_4 = 2\ \Omega$
- $R_5 = 1\ \Omega$;
- $R_6 = 2\ \Omega$.

f.e.m. das pilhas

- $E_1 = 10$ V;
- $E_2 = 20$ V.
- $E_3 = 10$ V;
- $E_4 = 20$ V.

Solução

Em primeiro lugar a cada malha do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. Nas malhas *ABGHA*, *BCFGB* e *CDEFC* temos, respectivamente, as corrente $i_1$, $i_2$ e $i_3$ no sentido horário (figura 1)

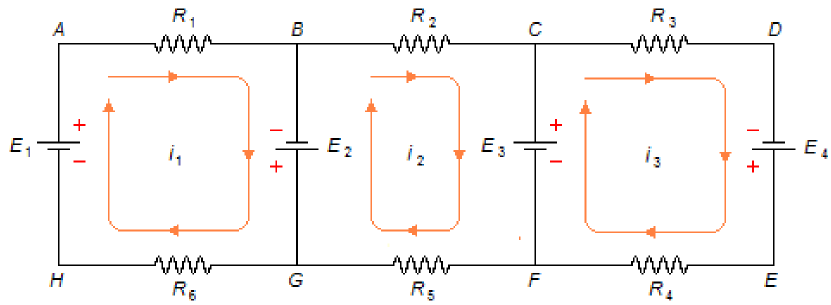


figura 1

Aplicando a *Lei das Malhas* de Kirchhoff à malha $i_1$ a partir do ponto *A* no sentindo escolhido, esquecendo as malhas $i_2$ e $i_3$ (figura 2 - a seguir), escrevemos

$$R_1 i_1 - E_2 + R_6 i_1 - E_1 = 0$$

substituindo os valores do problema fica

$$1 i_1 - 20 + 2 i_1 - 10 = 0$$
$$3 i_1 - 30 = 0$$
$$3 i_1 = 30$$
$$i_1 = \frac{30}{3}$$
$$i_1 = 10 \text{ A}$$

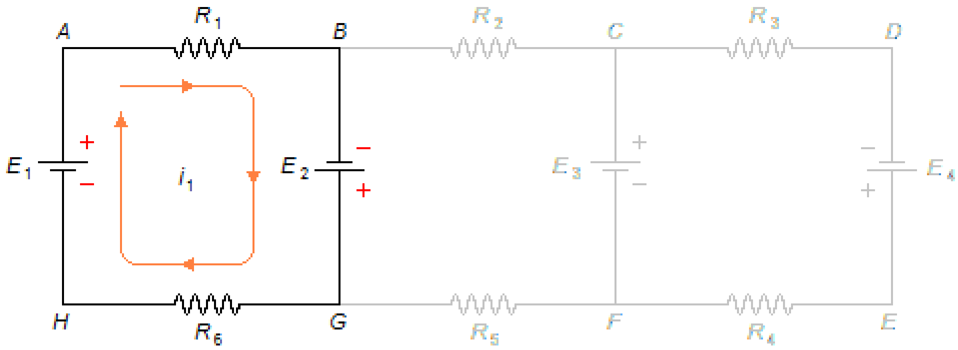



figura 2

Esquecendo as malhas $i_1$ e $i_3$ e aplicando a *Lei da Malhas* à malha $i_2$, como foi feito acima, temos pela figura 3, a partir do ponto *B*

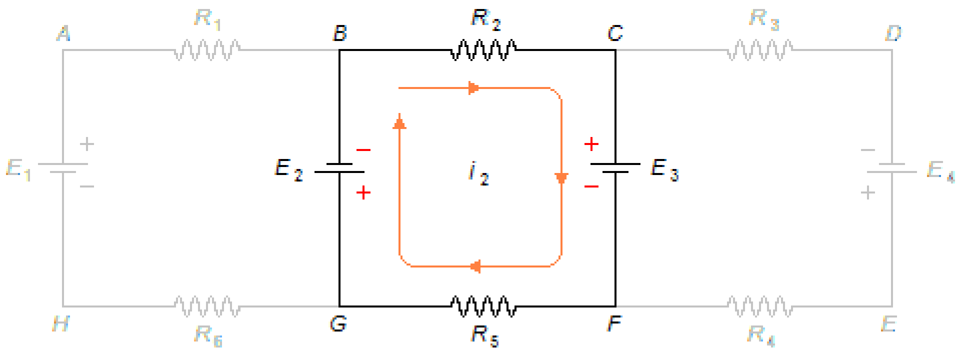



figura 3

$$R_2 i_2 + E_3 + R_5 i_2 + E_2 = 0$$

substituindo os valores

$$\begin{gathered} 2 i_2 + 10 + 1 i_2 + 20 = 0 \\ 2 i_2 + i_2 + 30 = 0 \\ 2 i_2 + i_2 = -30 \\ 3 i_2 = -30 \\ i_2 = \frac{-30}{3} \\ i_2 = -10 \text{ A} \end{gathered}$$

Esquecendo as malhas $i_1$ e $i_2$ e aplicando a *Lei da Malhas* à malha $i_3$, como foi feito acima, temos pela figura 4, a partir do ponto *C*

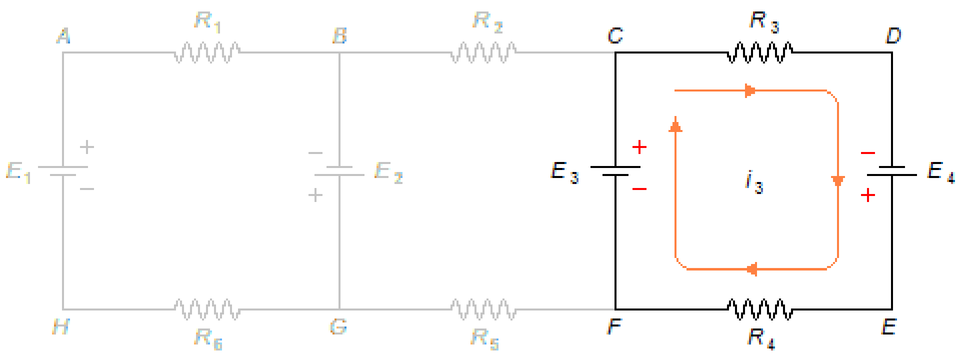



figura 4

$$R_3 i_3 - E_4 + R_4 i_3 - E_3 = 0$$

substituindo os valores

$$
\begin{gathered}
1 i_3-20+2 i_3-10=0 \\
i_3+2 i_3-30=0 \\
3 i_3=30 \\
i_3=\frac{30}{3} \\
i_3=10 \text{ A}
\end{gathered}
$$

No ramo *BG* vai circular uma corrente $i_4$ dada por

$$
\begin{gathered}
i_4=i_1-i_2 \\
i_4=10-(-10) \\
i_4=10+10 \\
i_4=20 \text{ A}
\end{gathered}
$$

O sentido da corrente $i_4$ será o mesmo da corrente $i_1$ .
No ramo *CF* vai circular uma corrente $i_5$ dada por

$$
\begin{gathered}
i_5=i_3-i_2 \\
i_5=10-(-10) \\
i_5=10+10 \\
i_5=20 \text{ A}
\end{gathered}
$$

O sentido da corrente $i_5$ será o mesmo da corrente $i_3$ .

Como o valor da corrente $i_2$ é negativo, isto indica que seu verdadeiro sentido é contrário ao escolhido na figura 1. Os valores das correntes são **$i_1$=10 A, $i_2$=10 A, $i_3$=10 A, $i_4$=20 A,** e **$i_5$=20 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 5.

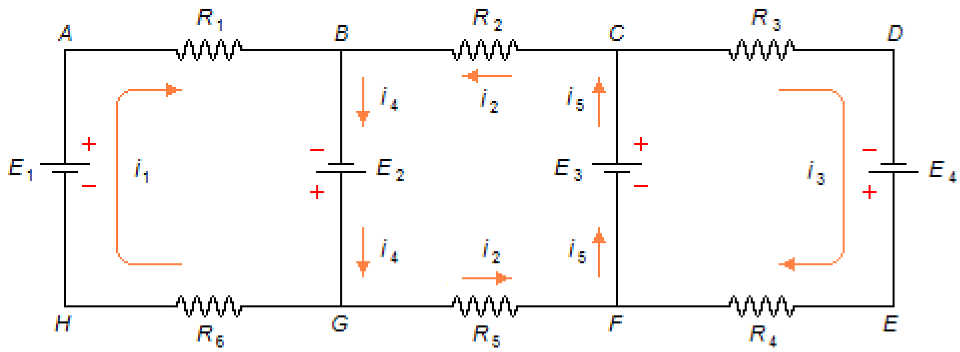
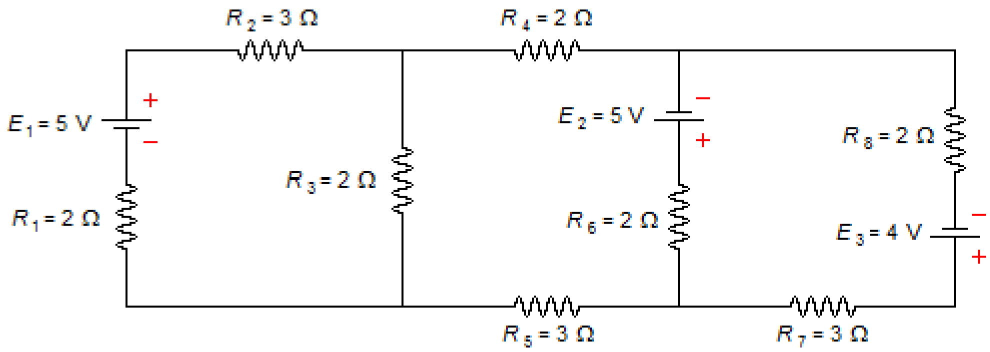



figura 5

No circuito abaixo determinar as correntes nos ramos e seus verdadeiros sentidos.




Dados do problema

Resistores

- $R_1 = 2\ \Omega$;
- $R_2 = 3\ \Omega$
- $R_3 = 2\ \Omega$;
- $R_4 = 2\ \Omega$
- $R_5 = 3\ \Omega$;
- $R_6 = 2\ \Omega$;
- $R_7 = 3\ \Omega$;
- $R_8 = 2\ \Omega$.

f.e.m. das pilhas

- $E_1 = 5$ V;
- $E_2 = 5$ V.
- $E_3 = 4$ V.

Solução

Em primeiro lugar a cada ramo do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. No ramo *GHAB* temos a corrente $i_1$ no sentido horário, no ramo *BC* a corrente $i_3$ indo de *B* para *C,* no ramo *CDEF* a corrente $i_4$ no sentido horário, no ramo *CF* a corrente $i_5$ indo de *C* para *F*, no ramo *FG* a corrente $i_6$ indo de *F* para *G* e no ramo *BG* a corrente $i_3$ indo de *B* para *G*. Em segundo lugar para cada malha do circuito atribuímos um sentido, também aleatório, para se percorrer a malha. Malha $\alpha$ (*GHABG*), malha $\beta$ (*BCFGB*) e malha $\gamma$ (*CDEFC*) todas percorridas no sentido horário (figura 1)

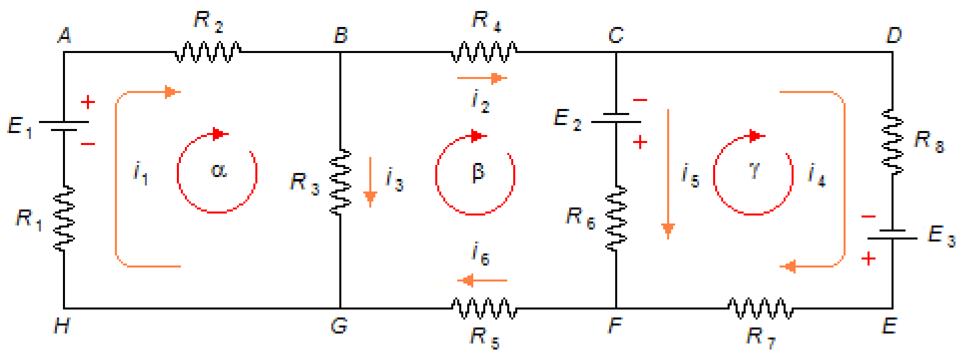



figura 1

- Aplicando a *Lei dos Nós*
  A corrente $i_1$ chega ao nó *B* e as correntes $i_2$ e $i_3$ saem dele

$$i_1 = i_2 + i_3$$
$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \qquad \text{(I)}$$

A corrente $i_2$ chega ao nó $C$ e as correntes $i_4$ e $i_5$ saem dele

$$i_2 = i_4 + i_5$$
$$i_2 - i_4 - i_5 = 0 \qquad \text{(II)}$$

As correntes $i_4$ e $i_5$ chegam ao nó $F$ e a corrente $i_6$ sai dele

$$i_6 = i_4 + i_5$$
$$i_4 + i_5 - i_6 = 0 \qquad \text{(III)}$$

- Aplicando a *Lei das Malhas*

Para a malha α a partir do ponto $A$ no sentindo escolhido, esquecendo as malhas β e γ (figura 2), temos

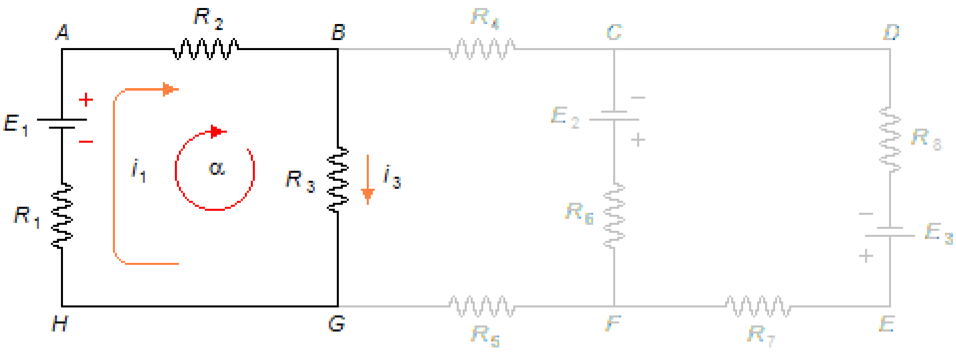



figura 2

$$R_2 i_1 + R_3 i_3 + R_1 i_1 - E_1 = 0$$

substituindo os valores do problema fica

$$3 i_1 + 2 i_3 + 2 i_1 - 5 = 0$$
$$5 i_1 + 2 i_3 = 5 \qquad \text{(IV)}$$

Para a malha β a partir do ponto $B$ no sentindo escolhido, esquecendo as malhas α e γ (figura 3), temos

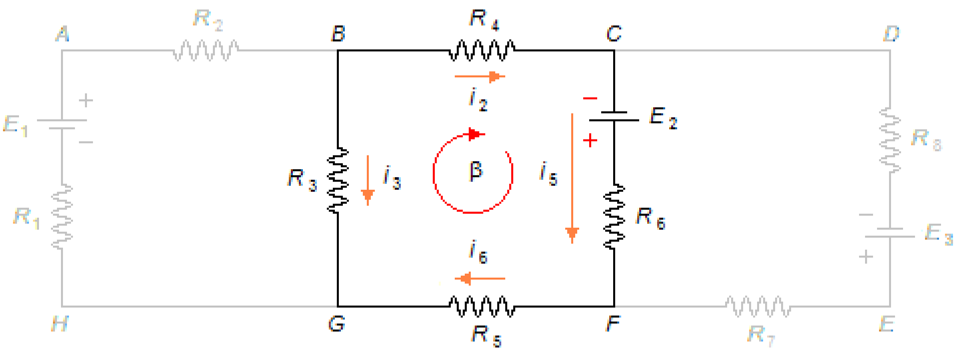



figura 3

$$R_4 i_2 - E_2 + R_6 i_5 + R_5 i_6 - R_3 i_3 = 0$$

substituindo os valores

$$2 i_2 - 5 + 2 i_5 + 3 i_6 - 2 i_3 = 0$$

$$2i_2-2i_3+2i_5+3i_6=5 \qquad \text{(V)}$$

Para a malha γ a partir do ponto *C* no sentindo escolhido, esquecendo as malhas α e β (figura 4), temos

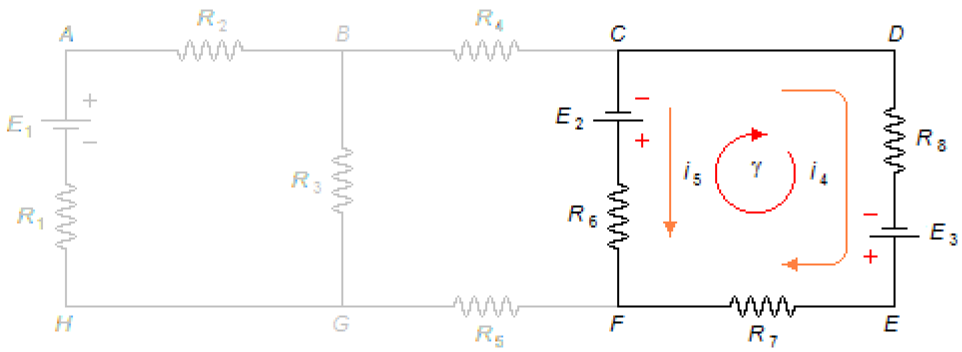



figura 4

$$R_8 i_4-E_3+R_7 i_4-R_6 i_5+E_2=0$$

substituindo os valores

$$2i_4-4+3i_4-2i_5+5=0$$
$$5i_4-2i_5+1=0$$
$$5i_4-2i_5=-1 \qquad \text{(VI)}$$

Com as equações (I), (II), (III), (IV), (V) e (VI) temos um sistema de seis equações a seis incógnitas ( $i_1$, $i_2$, $i_3$, $i_4$, $i_5$ e $i_6$ )

$$\left|\begin{array}{l} 5i_1+2i_3=5\\ 2i_2-2i_3+2i_5+3i_6=5\\ 5i_4-2i_5=-1\\ i_1-i_2-i_3=0\\ i_2-i_4-i_5=0\\ i_4+i_5-i_6=0 \end{array}\right. \qquad \text{(VII)}$$

escrevendo o sistema como

$$\left|\begin{array}{l} 5i_1+0i_2+2i_3+0i_4+0i_5+0i_6=5\\ 0i_1+2i_2-2i_3+0i_4+2i_5+3i_6=5\\ 0i_1+0i_2+0i_3+5i_4-2i_5+0i_6=-1\\ 1i_1-1i_2-1i_3+0i_4+0i_5+0i_6=0\\ 0i_1+1i_2+0i_3-1i_4-1i_5+0i_6=0\\ 0i_1+0i_2+0i_3+1i_4+1i_5-1i_6=0 \end{array}\right.$$

este sistema pode ser representado pela matriz a seguir, onde os valores a esquerda da linha tracejada representam a matriz dos coeficientes das correntes e os valores a direita representam o vetor dos termos independentes

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right|$$

***Observação:*** para resolver este sistema vamos escalonar esta matriz de modo a obter uma matriz triangular superior. Para fazer o escalonamento podemos realizar operações sobre as linhas da matriz como multiplicar ou dividir uma linha inteira (no caso incluindo o vetor dos termos independentes) por um número qualquer, podemos somar ou subtrair uma linha de outra e podemos inverter duas linhas de posição. Uma matriz triangular superior é aquela em que os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos.

Para que o elemento $a_{41}$ = 1 seja "zerado" vamos dividir a 1.ª linha por –5 e somar com a 4.ª linha e substituir na 4.ª linha $\left(\dfrac{L_1}{-5}+L_4\Rightarrow L_4\right)$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right| \quad \frac{L_1}{-5}+L_4\Rightarrow L_4$$

- $a_{41}=\dfrac{5}{-5}+1=-1+1=0$ ;
- $a_{42}=\dfrac{0}{-5}+(-1)=0-1=-1$ ;
- $a_{43}=\dfrac{2}{-5}+(-1)=-\dfrac{2}{5}-1$ , multiplicando o numerador e o denominador do último termo por 5, $a_{43}=-\dfrac{2}{5}-1.\dfrac{5}{5}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{5}{5}=-\dfrac{7}{5}$ ;
- $a_{44}=\dfrac{0}{-5}+0=0$ ;
- $a_{45}=\dfrac{0}{-5}+0=0$ ;
- $a_{46}=\dfrac{0}{-5}+0=0$ ;
- $v_4=\dfrac{5}{-5}+0=-1$ .

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{5} & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right|$$

Para que o elemento $a_{42}$ = --1 seja "zerado" vamos dividir a 2.ª linha por 2 e somar com a 4.ª linha e substituir na 4.ª linha $\left(\dfrac{L_2}{2}+L_4\Rightarrow L_4\right)$ e para que o elemento $a_{52}$ = 1 seja "zerado" vamos dividir a 2.ª linha por --2 e somar com a 5.ª linha e substituir na 5.ª linha $\left(\dfrac{L_2}{-2}+L_5\Rightarrow L_5\right)$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & -\dfrac{7}{5} & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \dfrac{L_2}{2}+L_4\Rightarrow L_4 \\ \dfrac{L_2}{-2}+L_5\Rightarrow L_5 \end{array}$$

- $a_{41}=\dfrac{0}{2}+0=0$ ;
- $a_{42}=\dfrac{2}{2}+(-1)=1-1=0$ ;
- $a_{43}=\dfrac{-2}{2}+\left(-\dfrac{7}{5}\right)=-1-\dfrac{7}{5}$ , multiplicando o numerador e o denominador do primeiro termo por 5, $a_{43}=-1.\dfrac{5}{5}-\dfrac{7}{5}=-\dfrac{5}{5}-\dfrac{7}{5}=-\dfrac{12}{5}$ ;
- $a_{44}=\dfrac{0}{2}+0=0$ ;
- $a_{45}=\dfrac{2}{2}+0=1$ ;
- $a_{46}=\dfrac{3}{2}+0=\dfrac{3}{2}$ ;
- $v_4=\dfrac{5}{2}+(-1)=\dfrac{5}{2}-1$ , multiplicando o numerador e o denominador do último termo por 2, $v_4=\dfrac{5}{2}-1.\dfrac{2}{2}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{2}=\dfrac{3}{2}$ .

- $a_{51}=\dfrac{0}{-2}+0=0$ ;
- $a_{52}=\dfrac{2}{-2}+1=-1+1=0$ ;
- $a_{53}=\dfrac{-2}{-2}+0=1$ ;
- $a_{54}=\dfrac{0}{-2}+(-1)=-1$ ;
- $a_{55}=\dfrac{2}{-2}+(-1)=-1-1=-2$ ;
- $a_{56}=\dfrac{3}{-2}+0=-\dfrac{3}{2}$ ;
- $v_5=\dfrac{5}{-2}+0=-\dfrac{5}{2}$ .

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{12}{5} & 0 & 1 & \dfrac{3}{2} & | & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -\dfrac{3}{2} & | & -\dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right|$$

Para que o elemento $a_{43}=-\frac{12}{5}$ seja “zerado” vamos trocar de posição as linhas 3 e 4 $L_3 \Leftrightarrow L_4$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -\frac{3}{2} & | & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right| \quad L_3 \Leftrightarrow L_4$$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -\frac{3}{2} & | & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right|$$

Para que o elemento $a_{53}=1$ seja “zerado” vamos multiplicar a 3.ª linha por $\frac{5}{12}$ e somar com a 5.ª linha e substituir na 5.ª linha $\left(\frac{5}{12}L_3+L_5 \Rightarrow L_5\right)$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -\frac{3}{2} & | & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right| \quad \frac{5}{12}L_3+L_5 \Rightarrow L_5$$

- $a_{51}=\frac{5}{12}.0+0=0$ ;
- $a_{52}=\frac{5}{12}.0+0=0$ ;
- $a_{53}=\frac{5}{12}.\left(-\frac{12}{5}\right)+1=-1+1=0$ ;
- $a_{54}=\frac{5}{12}.0+(-1)=-1$ ;
- $a_{55}=\frac{5}{12}.1+(-2)=\frac{5}{12}-2$ , multiplicando o numerador e o denominador do último termo por 12, $a_{55}=\frac{5}{12}-2.\frac{12}{12}=\frac{5}{12}-\frac{24}{12}=-\frac{19}{12}$ .;
- $a_{56}=\frac{5}{12}.\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{4}.\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{5}{8}-\frac{3}{2}$ , multiplicando o numerador e o denominador do último termo por 4, $a_{66}=\frac{5}{8}-\frac{3}{2}.\frac{4}{4}=\frac{5}{8}-\frac{12}{8}=-\frac{7}{8}$ ;

- $v_5=\dfrac{5}{12}.\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{8}-\dfrac{5}{2}$, multiplicando o numerador e o denominador do último termo por 4, $v_5=\dfrac{5}{8}-\dfrac{5}{2}.\dfrac{4}{4}=\dfrac{5}{8}-\dfrac{20}{8}=-\dfrac{15}{8}$.

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & -\dfrac{12}{5} & 0 & 1 & \dfrac{3}{2} & | & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\dfrac{19}{12} & -\dfrac{7}{8} & | & -\dfrac{15}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right|$$

Para que o elemento $a_{54}$ = --1 seja “zerado” vamos dividir a 4.ª linha por 5 e somar com a 5.ª linha e substituir na 5.ª linha $\left(\dfrac{L_4}{5}+L_5\Rightarrow L_5\right)$ e para que o elemento $a_{64}$ = 1 seja “zerado” vamos dividir a 4.ª linha por --5 e somar com a 6.ª linha e substituir na 6.ª linha $\left(\dfrac{L_4}{-5}+L_6\Rightarrow L_6\right)$

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & -\dfrac{12}{5} & 0 & 1 & \dfrac{3}{2} & | & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\dfrac{19}{12} & -\dfrac{7}{8} & | & -\dfrac{15}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \dfrac{L_4}{5}+L_5\Rightarrow L_5 \\ \dfrac{L_4}{-5}+L_6\Rightarrow L_6 \end{array}$$

- $a_{51}=\dfrac{0}{5}+0=0$ ;
- $a_{52}=\dfrac{0}{5}+0=0$ ;
- $a_{53}=\dfrac{0}{5}+0=0$ ;
- $a_{54}=\dfrac{5}{5}+(-1)=1-1=0$ ;
- $a_{55}=\dfrac{-2}{5}+\left(-\dfrac{19}{12}\right)=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{19}{12}$, o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) entre 5 e 12 é 60 *mmc* (5, 12) = 60, $a_{55}=\dfrac{-2.12-19.5}{60}=\dfrac{-24-95}{60}=-\dfrac{119}{60}$ ;
- $a_{56}=\dfrac{0}{5}+\left(-\dfrac{7}{8}\right)=-\dfrac{7}{8}$ ;
- $v_5=\dfrac{-1}{5}+\left(-\dfrac{15}{8}\right)=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{15}{8}$, *mmc* (5, 8) = 40, $v_5=\dfrac{-1.8-15.5}{40}=\dfrac{-8-75}{40}=\dfrac{83}{40}$ .

- $a_{61}=\dfrac{0}{-5}+0=0$ ;
- $a_{62}=\dfrac{0}{-5}+0=0$ ;
- $a_{63}=\dfrac{0}{-5}+0=0$ ;
- $a_{64}=\dfrac{5}{-5}+1=-1+1=0$ ;

- $a_{65}=\dfrac{-2}{-5}+1=\dfrac{2}{5}+1$ , multiplicando o numerador e o denominador do último termo por 5, $a_{65}=\dfrac{2}{5}+1.\dfrac{5}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{5}{5}=\dfrac{7}{5}$ ;
- $a_{66}=\dfrac{0}{-5}+(-1)=-1$ ;
- $v_{6}=\dfrac{-1}{-5}+0=\dfrac{1}{5}$ .

$$\left|\begin{array}{cccccccc}5&0&2&0&0&0&|&5\\0&2&-2&0&2&3&|&5\\0&0&-\dfrac{12}{5}&0&1&\dfrac{3}{2}&|&\dfrac{3}{2}\\0&0&0&5&-2&0&|&-1\\0&0&0&0&-\dfrac{119}{60}&-\dfrac{7}{8}&|&-\dfrac{83}{40}\\0&0&0&0&\dfrac{7}{5}&-1&|&\dfrac{1}{5}\end{array}\right|$$

Para que o elemento $a_{65}=\dfrac{7}{5}$ seja "zerado" vamos multiplicar a 5.ª linha por $\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}$ e somar com a 6.ª linha e substituir na 6.ª linha $\left(\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}L_5+L_6\Rightarrow L_6\right)$

***Observação:*** multiplicamos por $\dfrac{60}{119}$ para que o elemento $a_{55}$ fique igual a –1 $\left(a_{55}=-\dfrac{119}{60}.\dfrac{60}{119}=-1\right)$, em seguida multiplicamos por $\dfrac{7}{5}$ para que o elemento $a_{55}$ fique igual a $\dfrac{-7}{5}$ e somado com o elemento $a_{65}$ este elemento seja zero.

$$\left|\begin{array}{cccccccc}5&0&2&0&0&0&|&5\\0&2&-2&0&2&3&|&5\\0&0&-\dfrac{12}{5}&0&1&\dfrac{3}{2}&|&\dfrac{3}{2}\\0&0&0&5&-2&0&|&-1\\0&0&0&0&-\dfrac{119}{60}&-\dfrac{7}{8}&|&-\dfrac{83}{40}\\0&0&0&0&\dfrac{7}{5}&-1&|&\dfrac{1}{5}\end{array}\right| \quad \dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}L_5+L_6\Rightarrow L_6$$

- $a_{61}=\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}.0+0=0$ ;
- $a_{62}=\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}.0+0=0$ ;
- $a_{63}=\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}.0+0=0$ ;
- $a_{64}=\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}.0+0=0$ ;
- $a_{65}=\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}.\left(-\dfrac{119}{60}\right)+\dfrac{7}{5}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{7}{5}=0$ ;

- $a_{66}=\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}.\left(-\dfrac{7}{8}\right)+(-1)=-\dfrac{15}{119}.\dfrac{7}{5}.\dfrac{7}{2}-1=-\dfrac{735}{1190}-1$ , multiplicando o numerador e o denominador do último termo por 1190, $a_{66}=-\dfrac{735}{1190}-1.\dfrac{1190}{1190}=-\dfrac{735}{1190}-\dfrac{1190}{1190}=-\dfrac{1925}{1190}$ ;
- $v_6=\dfrac{60}{119}.\dfrac{7}{5}.\left(-\dfrac{83}{40}\right)+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{3}{119}.\dfrac{7}{5}.\dfrac{83}{2}+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{1743}{1190}+\dfrac{1}{5}$ , *mmc* (5, 1190) = 1190, $v_6=\dfrac{-1743.1+1.238}{1190}=\dfrac{1505}{1190}$ .

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 5\\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 3 & | & 5\\ 0 & 0 & -\dfrac{12}{5} & 0 & 1 & \dfrac{3}{2} & | & \dfrac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & | & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{119}{60} & -\dfrac{7}{8} & | & -\dfrac{83}{40}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1925}{1190} & | & \dfrac{-1505}{1190} \end{array}\right|$$

esta matriz representa o sistema

$$\left|\begin{array}{lllllll} 5i_1 & & +2i_3 & & & & = 5\\ & 2\,i_2 & -2\,i_3 & & +2\,i_5 & +3\,i_6 & = 5\\ & & -\dfrac{12}{5}\,i_3 & & +1\,i_5 & +\dfrac{3}{2}\,i_6 & = \dfrac{3}{2}\\ & & & 5\,i_4 & -2\,i_5 & & = -1\\ & & & & -\dfrac{119}{60}\,i_5 & -\dfrac{7}{8}\,i_6 & = -\dfrac{83}{40}\\ & & & & & -\dfrac{1925}{1190}\,i_6 & = -\dfrac{1505}{1190} \end{array}\right.$$

este sistema é equivalente ao sistema (VII), de imediato da sexta equação temos

$$\frac{-1925}{1190}\,i_6=-\frac{1505}{1190}$$
$$\frac{1925}{1190}\,i_6=\frac{1505}{1190}$$
$$i_6=\frac{1505}{1190}.\frac{1190}{1925}$$
$$i_6=\frac{1505}{1925}$$

dividindo o numerador e o denominador por 35, temos

$$i_6=\frac{1505:35}{1925:35}$$
$$i_6=\frac{43}{55}$$
$$i_6=0{,}78\ \text{A}$$

Substituindo o valor da corrente $i_6$ na quinta equação, temos

***Observação:*** ao invés de substituirmos a corrente no valor decimal vamos substituir o valor dado pela fração para diminuir erros de arredondamento.

$$-\frac{119}{60}\,i_5-\frac{7}{8}.\frac{43}{55}=-\frac{83}{40}$$
$$\frac{119}{60}\,i_5+\frac{301}{440}=\frac{83}{40}$$
$$\frac{119}{60}\,i_5=\frac{83}{40}-\frac{301}{440}$$

dividindo por 10 ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\frac{119}{60:10}\,i_5=\frac{83}{40:10}-\frac{301}{440:10}$$
$$\frac{119}{6}\,i_5=\frac{83}{4}-\frac{301}{44}$$

o *mmc* (4, 6, 44) = 132

$$\frac{119.22}{132}\,i_5=\frac{83.33-301.3}{132}$$
$$\frac{2618}{132}\,i_5=\frac{2739-903}{132}$$
$$\frac{2618}{132}\,i_5=\frac{1836}{132}$$

simplificando o valor 132 de ambos os lados da igualdade

$$2618\,i_5=1836$$
$$i_5=\frac{1836}{2618}$$

dividindo o numerador e o denominador por 34, temos

$$i_5=\frac{1836:34}{2618:34}$$
$$i_5=\frac{54}{77}$$
$$i_5=0{,}70\ \text{A}$$

Substituindo o valor da corrente $i_5$ na quarta equação, temos

$$5\,i_4-2.\frac{54}{77}=-1$$
$$5\,i_4-\frac{108}{77}=-1$$
$$5\,i_4=-1+\frac{108}{77}$$

multiplicando o numerador e o denominador por 77 do lado direito da igualdade

$$5\,i_4=-1.\frac{77}{77}+\frac{108}{77}$$
$$5\,i_4=-\frac{77}{77}+\frac{108}{77}$$
$$5\,i_4=\frac{31}{77}$$
$$i_4=\frac{31}{5.77}$$
$$i_4=\frac{31}{385}$$

$$i_4=0{,}08\ \text{A}$$

Substituindo os valores das correntes $i_5$ e $i_6$ na terceira equação, temos

$$
\begin{gathered}
-\frac{12}{5}\,i_3+1.\frac{54}{77}+\frac{3}{2}.\frac{43}{55}=\frac{3}{2}\\
-\frac{12}{5}\,i_3+\frac{54}{77}+\frac{129}{110}=\frac{3}{2}\\
\frac{12}{5}\,i_3=\frac{54}{77}+\frac{129}{110}-\frac{3}{2}
\end{gathered}
$$

o *mmc* (2, 5, 77, 110) = 770

$$
\begin{gathered}
\frac{12.154}{770}\,i_3=\frac{54.10+129.7-3.385}{770}\\
\frac{1848}{770}\,i_3=\frac{540+903-1155}{770}\\
\frac{1848}{770}\,i_3=\frac{288}{770}
\end{gathered}
$$

simplificando o valor 770 de ambos os lados da igualdade

$$
\begin{gathered}
1848\,i_3=288\\
i_3=\frac{288}{1848}
\end{gathered}
$$

dividindo o numerador e o denominador por 24, temos

$$
\begin{gathered}
i_3=\frac{288:24}{1848:24}\\
i_3=\frac{12}{77}\\
i_3=0{,}16\ \text{A}
\end{gathered}
$$

Substituindo os valores das correntes $i_3$, $i_5$ e $i_6$ na segunda equação, temos

$$
\begin{gathered}
2\,i_2-2.\frac{12}{77}+2.\frac{54}{77}+3.\frac{43}{55}=5\\
2\,i_2-\frac{24}{77}+\frac{108}{77}+\frac{129}{55}=5\\
2\,i_2+\frac{84}{77}+\frac{129}{55}=5\\
2\,i_2=5-\frac{84}{77}-\frac{129}{55}
\end{gathered}
$$

o *mmc* (1, 55, 77) = 385

$$
\begin{gathered}
\frac{2.385}{385}\,i_2=\frac{5.385-84.5-129.7}{385}\\
\frac{770}{385}\,i_2=\frac{1925-420-903}{385}\\
\frac{770}{385}\,i_2=\frac{602}{385}
\end{gathered}
$$

simplificando o valor 385 de ambos os lados da igualdade

$$
\begin{gathered}
770\,i_2=602\\
i_2=\frac{602}{770}
\end{gathered}
$$

dividindo o numerador e o denominador por 14, temos

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \frac{602:12}{770:14}\\
i_2 &= \frac{43}{55}\\
i_2 &= 0{,}78 \ \ \text{A}
\end{aligned}
$$

Substituindo o valor da corrente $i_3$ na primeira equação, temos

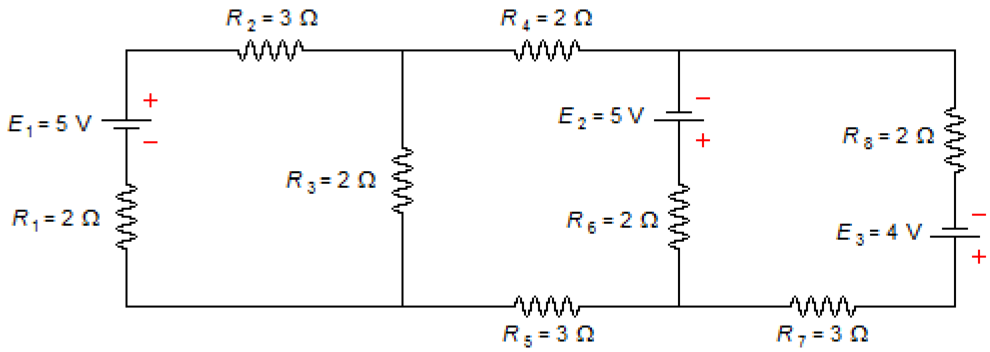
$$
\begin{aligned}
5i_1+2.\frac{12}{77} &= 5\\
5i_1 &= 5-\frac{24}{77}
\end{aligned}
$$

multiplicando o numerador e o denominador por 77 do lado direito da igualdade

$$
\begin{aligned}
5i_1 &= 5.\frac{77}{77}-\frac{24}{77}\\
5i_1 &= \frac{385}{77}-\frac{24}{77}\\
5i_1 &= \frac{361}{77}\\
i_1 &= \frac{361}{5.77}\\
i_1 &= \frac{361}{385}\\
i_1 &= 0{,}94 \ \ \text{A}
\end{aligned}
$$

Como o valor das correntes são todos positivos os sentidos escolhidos na figura 1 estão corretos. Os valores das correntes são **$i_1$=0,94 A**, **$i_2$=0,78 A,** **$i_3$=0,16 A,** **$i_4$=0,08 A,** **$i_5$=0,70 A,** e **$i_6$=0,78 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 5.

No circuito abaixo determinar as correntes nos ramos e seus verdadeiros sentidos.




Dados do problema

Resistores

- $R_1 = 2\ \Omega$;
- $R_2 = 3\ \Omega$
- $R_3 = 2\ \Omega$;
- $R_4 = 2\ \Omega$
- $R_5 = 3\ \Omega$;
- $R_6 = 2\ \Omega$;
- $R_7 = 3\ \Omega$;
- $R_8 = 2\ \Omega$.

f.e.m. das pilhas

- $E_1 = 5\ \text{V}$;
- $E_2 = 5\ \text{V}$.
- $E_3 = 4\ \text{V}$.

Solução

Em primeiro lugar a cada malha do circuito atribuímos, aleatoriamente, um sentido de corrente. Nas malhas *ABGHA*, *BCFGB* e *CDEFC* temos, respectivamente, as corrente $i_1$, $i_2$ e $i_3$ no sentido horário (figura 1)

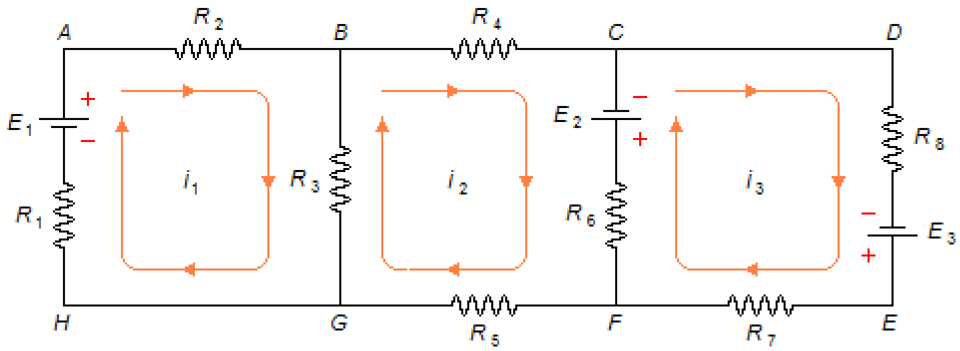



figura 1

Aplicando a *Lei das Malhas* de Kirchhoff à malha $i_1$ a partir do ponto *A* no sentindo escolhido, esquecendo as malhas $i_2$ e $i_3$ (figura 2 - a seguir), escrevemos

$$R_2 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) + R_1 i_1 - E_1 = 0$$

substituindo os valores do problema fica

$$3\,i_1 + 2\,(i_1 - i_2) + 2\,i_1 - 5 = 0$$
$$3\,i_1 + 2\,i_1 - 2\,i_2 + 2\,i_1 = 5$$
$$7\,i_1 - 2\,i_2 = 5 \qquad \text{(I)}$$

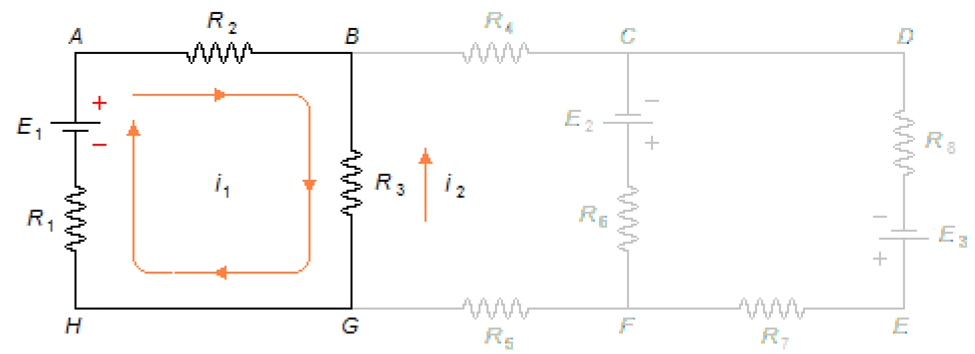



figura 2

Esquecendo as malhas $i_1$ e $i_3$ e aplicando a *Lei da Malhas* à malha $i_2$, como foi feito acima, temos pela figura 3, a partir do ponto *B*

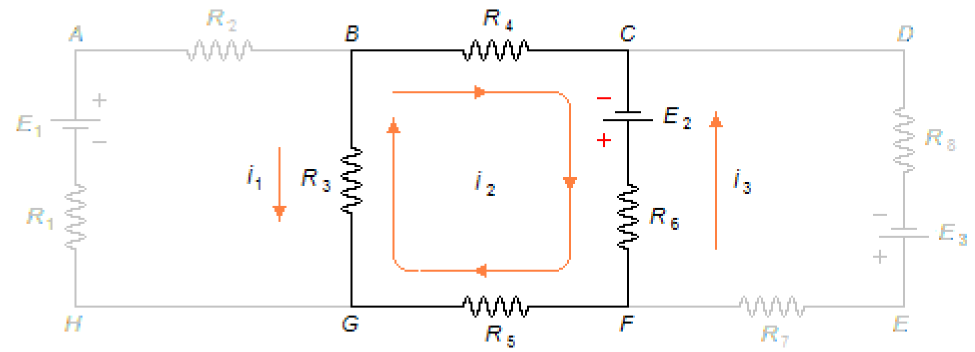



figura 3

$$R_4 i_2 - E_2 + R_6(i_2 - i_3) + R_5 i_2 + R_3(i_2 - i_1) = 0$$

substituindo os valores

$$2\,i_2 - 5 + 2\,(i_2 - i_3) + 3i_2 + 2\,(i_2 - i_1) = 0$$
$$2\,i_2 + 2\,i_2 - 2\,i_3 + 3i_2 + 2i_2 - 2\,i_1 = 5$$
$$-2\,i_1 + 9\,i_2 - 2\,i_3 = 5 \qquad \text{(II)}$$

Esquecendo as malhas $i_1$ e $i_2$ e aplicando a *Lei da Malhas* à malha $i_3$, como foi feito acima, temos pela figura 4, a partir do ponto *C*

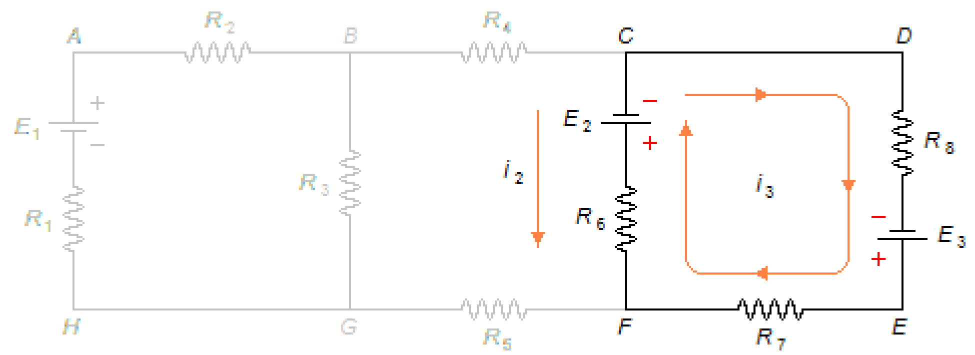



figura 4

$$R_8 i_3 - E_3 + R_7 i_3 + R_6(i_3 - I_2) + E_2 = 0$$

substituindo os valores

$$
\begin{gathered}
2\,i_3-4+3\,i_3+2\,(\,i_3-i_2\,)+5=0\\
2\,i_3+3\,i_3+2\,i_3-2\grave{i}_2+1=0\\
-2\grave{i}_2+7\,i_3=-1
\end{gathered}
\qquad \text{(III)}
$$

Com as equações (I), (II) e (III) temos um sistema de três equações a três incógnitas ($i_1$, $i_2$, $i_3$, $i_4$, $i_5$ e $i_6$)

$$
\left|\begin{array}{l}
7\,i_1-2\,i_2=5\\
-2\,i_1+9\,i_2-2\,i_3=5\\
-2\grave{i}_2+7\,i_3=-1
\end{array}\right.
\qquad \text{(VII)}
$$

isolando o valor da corrente $i_1$ na primeira equação e da corrente $i_3$ na terceira equação, temos

$$
\begin{gathered}
7\,i_1-2\,i_2=5\\
7\,i_1=5+2\,i_2\\
i_1=\frac{5+2\,i_2}{7}
\end{gathered}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{gathered}
-2\,\grave{i}_2+7\,i_3=-1\\
7\,i_3=-1-2\,\grave{i}_2\\
i_3=\frac{-1+2\,\grave{i}_2}{7}
\end{gathered}
\qquad \text{(VIII)}
$$

substituindo estes valores na segunda equação, obtemos

$$
\begin{gathered}
-2\left(\frac{5+2\,i_2}{7}\right)+9\,i_2-2\left(\frac{-1+2\,\grave{i}_2}{7}\right)=5\\
\frac{-10-4\,i_2}{7}+9\,i_2+\frac{2-4\,\grave{i}_2}{7}=5
\end{gathered}
$$

multiplicando o numerador e o denominador do segundo termo do lado esquerdo da igualdade e do lado direito, temos

$$
\begin{gathered}
\frac{-10-4\,i_2}{7}+\frac{7}{7}.9\,i_2+\frac{2-4\,\grave{i}_2}{7}=5.\frac{7}{7}\\
\frac{-10-4\,i_2}{7}+\frac{63}{7}\,i_2+\frac{2-4\,\grave{i}_2}{7}=\frac{35}{7}\\
\frac{-10-4\,i_2+63\,i_2+2-4\,\grave{i}_2}{7}=\frac{35}{7}
\end{gathered}
$$

simplificando o fator 7 de ambos os lados da igualdade

$$
\begin{gathered}
-10-4\,i_2+63\,i_2+2-4\,\grave{i}_2=35\\
-8-55\,i_2=35\\
55\,i_2=35+8\\
i_2=\frac{43}{55}\\
i_2=0{,}78\ \text{A}
\end{gathered}
$$

Substituindo este valor nas expressões dadas em (VIII) obtemos os valores das correntes $i_1$ e $i_3$

***Observação:*** ao invés de substituirmos a corrente no valor decimal vamos substituir o valor dado pela fração para diminuir erros de arredondamento.

$$
\begin{gathered}
i_1=\frac{5+2.\dfrac{43}{55}}{7}\\
i_1=\left(5+2.\frac{43}{55}\right)\frac{1}{7}
\end{gathered}
$$

multiplicando o numerador e o denominador do primeiro termo entre parenteses por 55, temos

$$
\begin{aligned}
i_1 &= \left(5\,.\frac{55}{55}+2\,.\frac{43}{55}\right)\frac{1}{7}\\
i_1 &= \left(\frac{275}{55}+\frac{86}{55}\right)\frac{1}{7}\\
i_1 &= \frac{361}{55}\,.\frac{1}{7}\\
i_1 &= \frac{361}{385}\\
i_1 &= 0{,}94\ \text{ A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_3 &= \frac{-1+2\,.\dfrac{43}{55}}{7}\\
i_3 &= \left(-1+2\,.\frac{43}{55}\right)\frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

multiplicando o numerador e o denominador do primeiro termo entre parenteses por 55, temos

$$
\begin{aligned}
i_3 &= \left(-1\,.\frac{55}{55}+2\,.\frac{43}{55}\right)\frac{1}{7}\\
i_3 &= \left(\frac{-55}{55}+\frac{86}{55}\right)\frac{1}{7}\\
i_3 &= \frac{31}{55}\,.\frac{1}{7}\\
i_3 &= \frac{31}{385}\\
i_3 &= 0{,}08\ \text{ A}
\end{aligned}
$$

No ramo *BG* vai circular uma corrente $i_4$ dada por

$$
\begin{aligned}
i_4 &= i_1-i_2\\
i_4 &= \frac{361}{385}-\frac{43}{55}
\end{aligned}
$$

o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) entre 55 e 385 é 60 *mmc* (55, 385) = 385

$$
\begin{aligned}
i_4 &= \frac{361\,.1-43\,.7}{385}\\
i_4 &= \frac{361-301}{385}\\
i_4 &= \frac{60}{385}
\end{aligned}
$$

dividindo o numerador e o denominador por 5

$$
\begin{aligned}
i_4 &= \frac{60:5}{385:5}\\
i_4 &= \frac{12}{77}\\
i_4 &= 0{,}16\ \text{ A}
\end{aligned}
$$

O sentido da corrente $i_4$ será o mesmo da corrente $i_1$ (de maior valor).
No ramo *CF* vai circular uma corrente $i_5$ dada por

$$
i_5 = i_2-i_3
$$

$$i_5=\frac{43}{55}-\frac{31}{385}$$

o *mmc* (55, 385) = 385

$$i_5=\frac{43.7-31.1}{385}$$
$$i_5=\frac{301-31}{385}$$
$$i_5=\frac{270}{385}$$

dividindo o numerador e o denominador por 5

$$i_5=\frac{270:5}{385:5}$$
$$i_5=\frac{54}{77}$$
$$i_5=0{,}70\ \text{ A}$$

O sentido da corrente $i_5$ será o mesmo da corrente $i_2$ (de maior valor).

Os valores das correntes são ***i*₁=0,94 A**, ***i*₂=0,78 A**, ***i*₃=0,08 A**, ***i*₄=0,16 A**, e ***i*₅=0,70 A** e seus sentidos estão mostrados na figura 5.

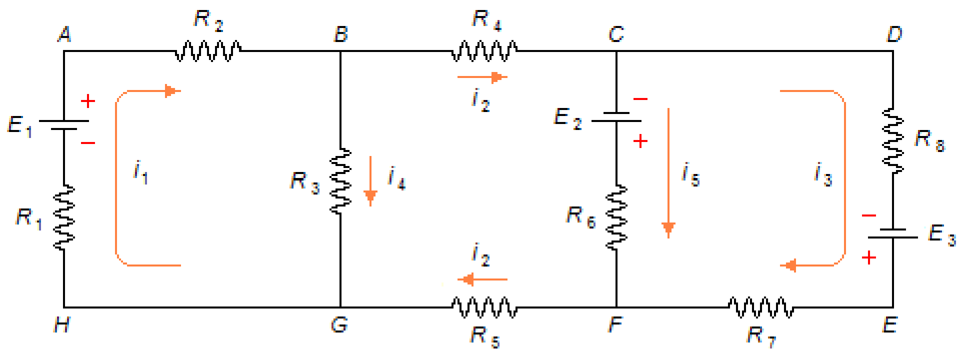



figura 5