

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO ARNULPHO MATTOS

CURSO TÉCNICO EM ELETROTÉCNICA

Caderno de Exercícios

ELETRICIDADE BÁSICA EM REGIME CC

2022

ÍNDICE

Circuitos Básicos	3
Método das Malhas Independentes	17
Método das Tensões nos Nós	23
Teoremas de Thèvenin e Norton	31

CIRCUITOS BÁSICOS

Exercícios Resolvidos:

1.

Calcule a resistência de uma barra de cobre com 3 m de comprimento, 0,5 cm de largura e 3 cm de altura.

Resolução:

- Secção:

$$S = (0,5 \cdot 10^{-2}) \cdot (3 \cdot 10^{-2}) = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

- Resistência:

$$\rho = 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m} \quad (\text{A partir da tabela})$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{(1,72 \cdot 10^{-8}) \cdot 3}{1,5 \cdot 10^{-4}} = 344 \text{ } \mu\Omega$$

$$\mathbf{R = 344 \text{ } \mu\Omega}$$

2.

Determine a resistência de um cabo de alumínio de 200 m de comprimento e 1 mm de diâmetro, a 35° C de temperatura.

Resolução:

- Secção:

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 = 7,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$$

- Resistência a 20° C:

$$R_{20} = \rho \cdot \frac{l}{S} = \frac{(2,83 \cdot 10^{-8}) \cdot 200}{7,85 \cdot 10^{-7}} = 7,21 \Omega$$

- Resistência a 35° C:

$\alpha = 0,00391^\circ \text{C}^{-1}$ (A partir da tabela)

$$R_{35} = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (T_{35} - T_{20})] = 7,21 \cdot [1 + 0,00391 \cdot (35 - 20)] = 7,63 \Omega$$

R = 7,63 Ω

3.

Sabendo que uma determinada resistência apresenta um valor nominal de 100 Ω com uma tolerância de 5%, calcule os valores possíveis para a corrente que a atravessa se lhe for aplicada uma tensão de 10 V.

Resolução:

- Limites da resistência:

$$R_{MAX} = R + R \cdot 0,05 = 105 \Omega$$

$$R_{MIN} = R - R \cdot 0,05 = 95 \Omega$$

- Limites da corrente:

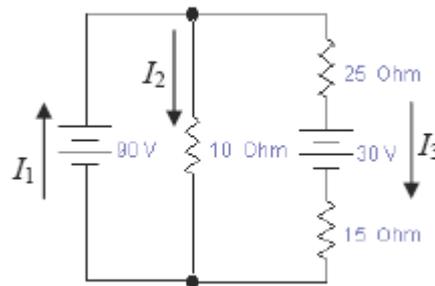
$$I_{MAX} = \frac{V}{R_{MIN}} = \frac{10}{95} = 0,105 \text{ A}$$

$$I_{MIN} = \frac{V}{R_{MAX}} = \frac{10}{105} = 0,095 \text{ A}$$

95 mA < I < 105 mA

4.

Determine as correntes que percorrem cada ramo do circuito ao lado.



Resolução:

- Corrente I_2 :

$$I_2 = \frac{90}{10} = 9 \text{ A} \quad \text{--- Pela Lei de Ohm}$$

- Corrente I_3 :

$$\sum E = \sum R \cdot I$$

$$90 - 30 = 25 \cdot I_3 + 15 \cdot I_3 \quad \text{--- Pela Lei das Malhas (malha exterior)}$$

$$I_3 = 1,5 \text{ A}$$

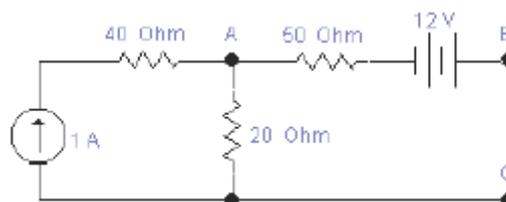
- Corrente I_1 :

$$I_1 = I_2 + I_3 = 9 + 1,5 = 10,5 \text{ A} \quad \text{--- Pela Lei dos Nós}$$

$$\mathbf{I_1 = 10,5 \text{ A}; I_2 = 9 \text{ A}; I_3 = 1,5 \text{ A}}$$

5.

Para o circuito seguinte pretende-se saber as quedas de tensão entre os pontos A e C bem como entre os pontos B e C.



Resolução:

- Corrente na resistência de 50 Ω :

-Como este ramo é aberto a corrente é nula.

- Corrente nas resistências de 40Ω e 20Ω :

A corrente nestas duas resistências é igual e vale 1 A pois é gerada pela fonte de corrente.

- Queda de tensão entre A e C:

A queda de tensão é a queda na resistência de 20Ω , logo:

$$V_{AC} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ V}$$

- Queda de tensão entre B e C:

$$V_{BC} = V_{BA} + V_{AC}$$

$$V_{BA} = 12 + 0 \cdot 50 = 12 \text{ V}$$

$$V_{BC} = 12 + 20 = 32 \text{ V}$$

$$\mathbf{V_{AC} = 20 \text{ V}; V_{BC} = 32 \text{ V}}$$

6.

As resistências R_1 , R_2 e R_3 estão em série com uma fonte de tensão de 100 V . A queda de tensão total nas resistências R_1 e R_2 é de 50 V , e sobre R_2 e R_3 é 80 V . Sabendo que a soma das três resistências é igual a 50Ω determine, utilizando o processo do divisor de tensão, o valor de cada uma das resistências.

Resolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 + R_2 + R_3 = 50 \\ \frac{100}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot (R_1 + R_2) = 50 \\ \frac{100}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot (R_2 + R_3) = 80 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = 10 \Omega \\ R_2 = 15 \Omega \\ R_3 = 25 \Omega \end{array} \right.$$

7.

Uma corrente de 45 A circula por quatro resistências de 5 Ω, 6 Ω, 12 Ω e 20 Ω que se encontram em paralelo. Com recurso ao processo do divisor de corrente determine a intensidade de corrente em cada uma das resistências.

Resolução:

$$I_{R_5} = \frac{45}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{5}$$

$$I_{R_6} = \frac{45}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{6}$$

$$I_{R_{12}} = \frac{45}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{12}$$

$$I_{R_{20}} = \frac{45}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{20}$$

$$I_{R_5} = 18 \text{ A}$$

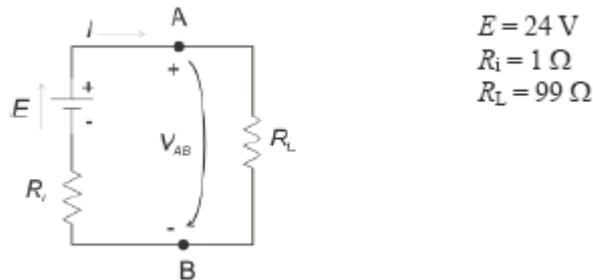
$$I_{R_6} = 15 \text{ A}$$

$$I_{R_{12}} = 7,5 \text{ A}$$

$$I_{R_{20}} = 4,5 \text{ A}$$

8.

Considere o circuito apresentado na figura seguinte e determine:



- A) A corrente no circuito (I)
- B) A potência consumida (dissipada) pela carga ($P_{\text{cons.}}$)
- C) A potência produzida pelo gerador ($P_{\text{prod. ger.}}$)
- D) A potência de perdas no gerador ($P_{\text{perdas. ger.}}$ ou P_0)
- E) A potência fornecida pelo gerador ($P_{\text{forn. ger.}}$)

F) Comente os resultados obtidos nas alíneas B) e E)

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{A)} \\ E &= (R_i + R_L) \cdot I \\ I &= \frac{E}{R_i + R_L} = \frac{24}{1 + 99} \\ I &= 0,24 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B)} \\ P_{\text{cons.}} &= R_L \cdot I^2 \\ P_{\text{cons.}} &= 99 \cdot (0,24)^2 \\ P_{\text{cons.}} &\cong 5,7 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C)} \\ P_{\text{prod. ger.}} &= E \cdot I \\ P_{\text{prod. ger.}} &= 24 \cdot 0,24 \\ P_{\text{prod. ger.}} &= 5,76 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D)} \\ P_{\text{perdas}} &= R_i \cdot I^2 \\ P_{\text{perdas}} &= 1 \cdot (0,24)^2 \\ P_{\text{perdas}} &= 57,6 \text{ mW} \end{aligned}$$

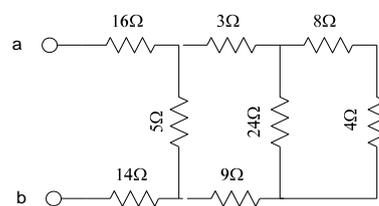
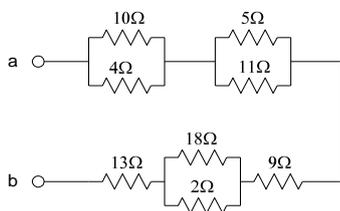
$$\begin{aligned} \text{E)} \\ P_{\text{forn. ger.}} &= P_{\text{prod. ger.}} - P_{\text{perdas}} \\ P_{\text{forn. ger.}} &= 5,76 - 0,0576 \\ P_{\text{forn. ger.}} &\cong 5,7 \text{ W} \end{aligned}$$

F) Neste circuito, como só há uma carga (R_L), a potência fornecida pelo gerador é totalmente consumida por essa carga.

Exercícios Propostos:

1.

Calcule o valor das resistências equivalentes dos circuitos seguintes:

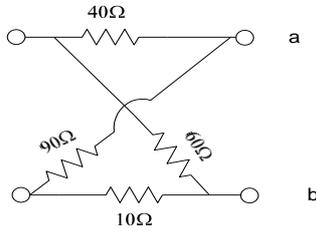


(Sol: 30.1Ω, 34Ω)

2.

Encontre a resistência total, R_T , do circuito seguinte considerando os terminais a e b:

- a) abertos
- b) curto-circuitados



(Sol: a) 45.5Ω b) 33Ω)

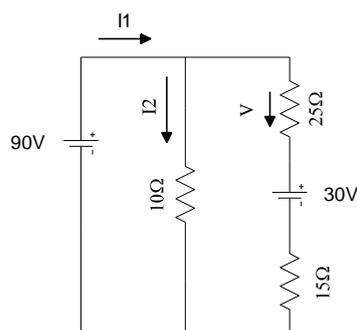
3.

Uma resistência ligada em série com uma outra de 8Ω , consome uma potência de $100W$ quando é aplicada a ambas uma tensão de $60V$. Encontre o valor da resistência desconhecida.

(Sol: $R = 16\Omega$ ou $R = 4\Omega$)

4.

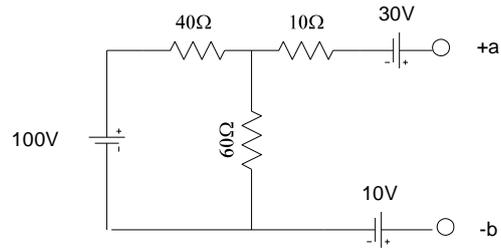
Encontre I_1 , I_2 , e V no circuito da figura.



(Sol : $I_1 = 9A$, $I_2 = 1.5A$, $V = 37.5V$)

5.

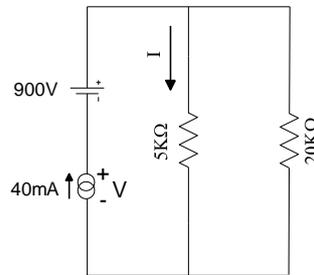
Encontre a tensão V_{ab} , no circuito da figura.



(Sol: $V_{ab} = 80V$)

6.

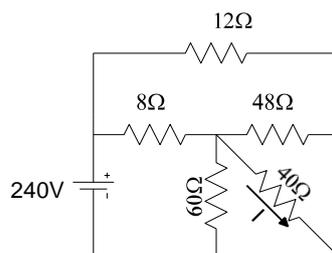
Calcule I e V no circuito da figura.



(Sol: $I = 32mA$, $V = -740V$)

7.

Calcule o valor de I, no circuito da figura.

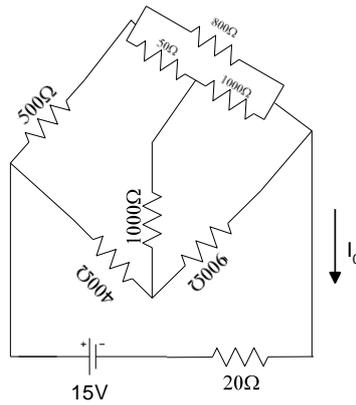


(Sol: $I = 4A$)

8.

Reduza o circuito da figura à sua forma mais simples, utilizando a transformação Y-Δ.

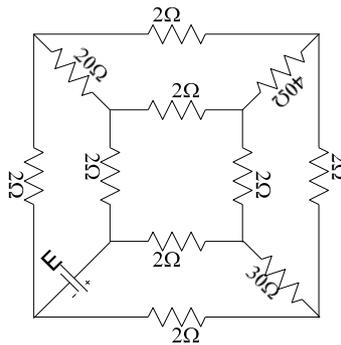
Determine a corrente I_0 .



(Sol: $I_0 = 26.82\text{mA}$)

9.

Considere o circuito seguinte em que $E = 10\text{V}$. Determine as quedas de tensão nas resistências de 20 , 30 e 40Ω .



(Sol: $V_{20} = 8.1\text{V}$, $V_{30} = 8.4\text{V}$, $V_{40} = 7.8\text{V}$)

10.

Um gerador elétrico que funciona 5000 horas por ano, fornece uma corrente de 400A com uma tensão de 6000V . Determine:

- A potência fornecida ao gerador.
- A energia produzida anualmente.
- A potência absorvida sendo o seu rendimento de 95%.

(Sol: a) 2.4 MW b) 12 GWh c) 2.53 MW)

11.

Três resistências, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ e $R_3 = 2\Omega$ estão ligadas em série a uma bateria cuja tensão é 24V. Determine:

- valor da resistência total.
- A intensidade da corrente que percorre as resistências.
- As tensões U_1 , U_2 e U_3 aos terminais de cada resistência.
- A potência total

(Sol: a) 12Ω b) 2A c) 12V/8V/4V d) 48W)

12.

Ligam-se em série duas lâmpadas de 100W/220V. Determine a potência total do conjunto, quando ligado à tensão de 220v.

(Sol: 50W)

13.

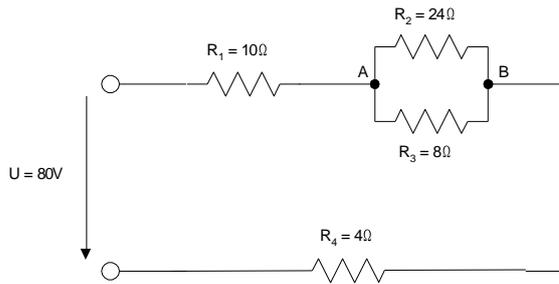
O elemento aquecedor de um forno eléctrico é constituído por 5 espirais de condutor eléctrico com 100Ω , cada uma, ligadas em paralelo. Sabendo que a tensão de alimentação é de 220V, calcule:

- A intensidade da corrente absorvida.
- A resistência equivalente.
- A potência do forno.

(Sol: a) 2.2A b) 20Ω c) 2.42kW)

14.

Considere o circuito apresentado na figura e determine as seguintes grandezas:



- a) A resistência total.
- b) A intensidade da corrente total.
- c) A tensão aos terminais de R_1 e R_4 .
- d) A tensão entre os pontos A e B.
- e) As intensidades das correntes em R_2 e R_3 .
- f) A potência total dissipada e a dissipada em R_2 .

(Sol: a) 20Ω b) 4A c) 40V/16V d) 24V e) 1A/3A f) 320W/24W)

15.

Um gerador de corrente contínua alimenta com 220V dois irradiadores em paralelo, com 1500W de potência cada um. Determine:

- a) A intensidade da corrente absorvida pelos aparelhos.
- b) A f.e.m. do gerador sabendo que a sua resistência interna é de 0.5Ω .

(Sol: a) 13.6A b) 226.8V)

16.

Seis pilhas com f.e.m. de 9V e resistência interna de 0.5Ω estão agrupadas em série e alimentam um receptor de 120Ω . Determine:

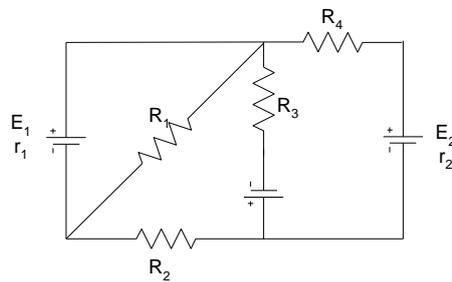
- a) As características do gerador equivalente.
- b) A intensidade absorvida pelo receptor.
- c) A tensão aos terminais do gerador.

- d) A queda de tensão no conjunto das pilhas.
- e) As perdas por efeito de Joule nas pilhas.

(Sol: a) 54V b) 0.44A c) 52.7V d) 1.3V e) 0.6W)

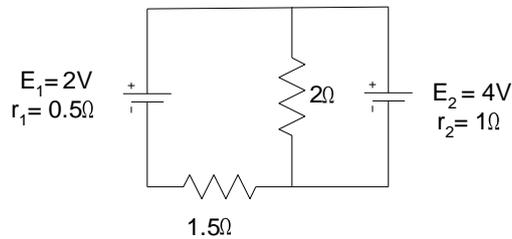
17.

Dado o circuito, escreva as equações que lhe permitem calcular a intensidade das correntes em todos os ramos.



18.

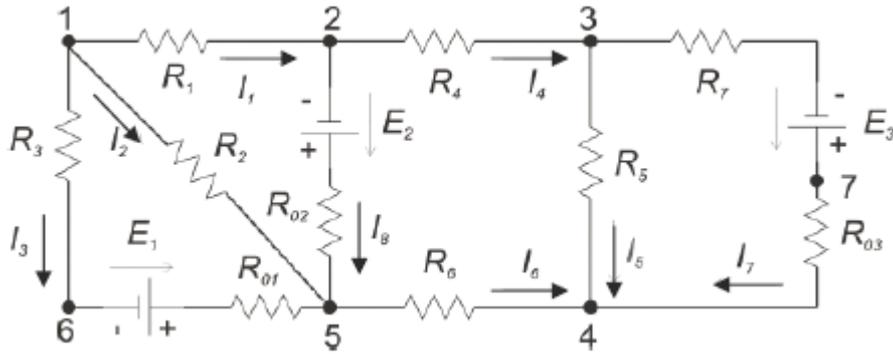
Para o circuito da figura calcule a intensidade da corrente nos diferentes ramos.



(Sol: $I_1 = 0.25A$ $I_2 = 1.5A$ $I_3 = 1.25A$)

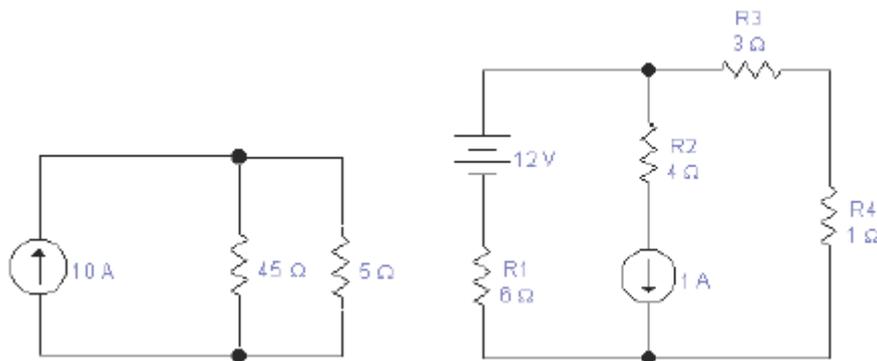
19.

Utilizando as leis de Kirchhoff, escreva o sistema de equações que lhe permitiria calcular o valor das correntes nos ramos do seguinte circuito.



20.

Calcule a corrente que percorre cada uma das resistências dos circuitos apresentados na figura seguinte.

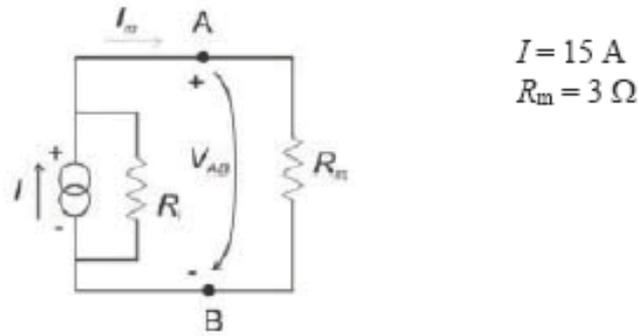


21.

Determine a resistência equivalente do circuito paralelo constituído por resistências de 0,1 kΩ, 150 Ω, 300 Ω e 680 Ω.

22.

O circuito da figura seguinte representa uma fonte de corrente ligada a uma carga R_m . A fonte de corrente tem resistência interna R_i desconhecida e gera uma corrente I . R:
 A) $R_i = 447 \Omega$; B) $P_{\text{cons.}} = 666 \text{ W}$; C) $P_{\text{prod.}} = 670,5 \text{ W}$; D) $\eta = 99,33\%$; E) $R'_i = 2997 \Omega$;

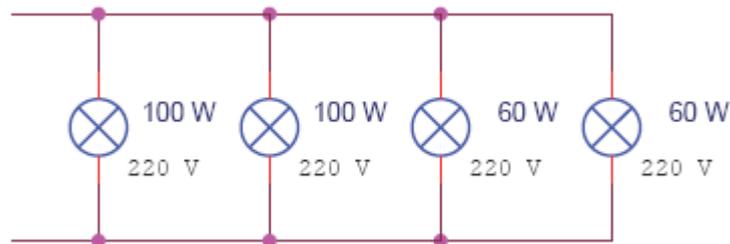


Determine:

- A) Sabendo que a carga é atravessada por uma corrente de 14.9 A, determine o valor da resistência interna da fonte (R_i)
- B) A potência consumida pela carga
- C) A potência produzida pelo gerador (fonte de corrente)
- D) O rendimento do gerador (η)
- E) Qual o novo valor de R_i para que o rendimento do gerador fosse de 99.9%

23.

Numa sala encontram-se ligadas em paralelo 4 lâmpadas; 2 de 60 W / 220 V e 2 de 100 W / 220 V.



Determine:

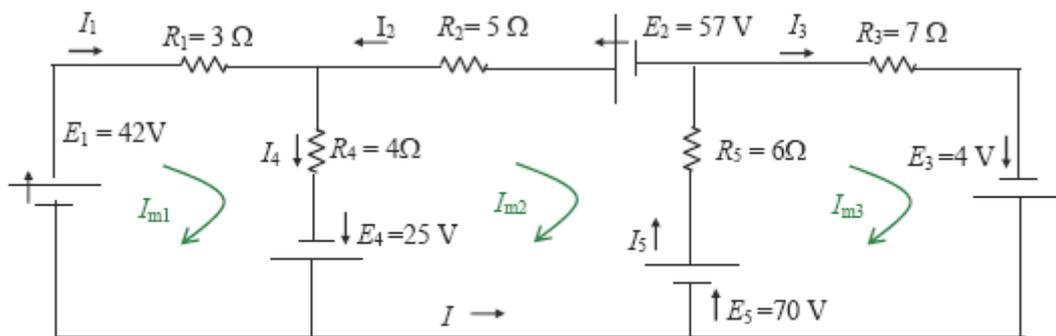
- A) A resistência de cada lâmpada
- B) A resistência total equivalente do circuito (R_{eq})
- C) A corrente que percorre cada lâmpada
- D) A corrente de entrada do circuito

MÉTODO DAS MALHAS INDEPENDENTES

Exercícios Resolvidos:

1.

Determinar as correntes nos ramos, usando o método das correntes de malhas independentes.



$$\begin{cases} E_1 + E_4 = (R_1 + R_4) \cdot I_{m1} - R_4 \cdot I_{m2} \\ -E_4 - E_2 - E_5 = -R_4 \cdot I_{m1} + (R_4 + R_2 + R_5) \cdot I_{m2} - R_5 \cdot I_{m3} \\ E_5 + E_3 = -R_5 \cdot I_{m2} + (R_5 + R_3) \cdot I_{m3} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 67 \\ -152 \\ 74 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \end{vmatrix}$$

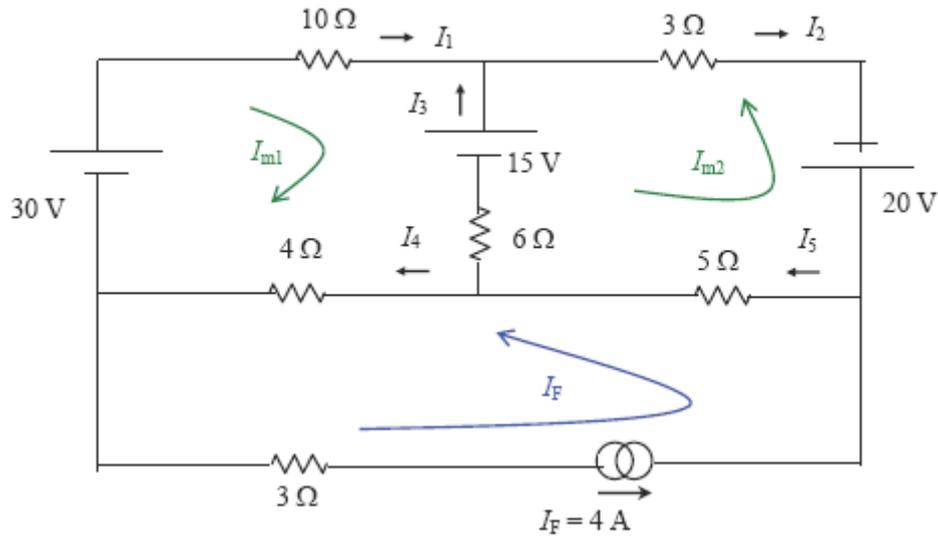
$\Delta = 905$

$$\begin{aligned} I_{m1} &= 5 \text{ A} ; I_{m2} = -8 \text{ A} ; I_{m3} = 2 \text{ A} \\ I_1 = I_{m1} &\rightarrow I_1 = 5 \text{ A} & I_4 = I_{m1} - I_{m2} &\rightarrow I_4 = 13 \text{ A} \\ I_2 = -I_{m2} &\rightarrow I_2 = 8 \text{ A} & I_5 = -I_{m2} + I_{m3} &\rightarrow I_5 = 10 \text{ A} \\ I_3 = I_{m3} &\rightarrow I_3 = 2 \text{ A} & I = -I_{m2} &\rightarrow I = 8 \text{ A} \end{aligned}$$

R : $I_1 = 5 \text{ A}$, $I_2 = 8 \text{ A}$, $I_3 = 2 \text{ A}$, $I_4 = 13 \text{ A}$, $I_5 = 10 \text{ A}$ e $I = 8 \text{ A}$

2.

Utilizar o método das correntes de malhas independentes, para calcular as correntes nos ramos do seguinte circuito.



Resolução:

$$\begin{cases} 30 - 15 = (10 + 6 + 4) \cdot I_{m1} + 6 \cdot I_{m2} + 4 \cdot I_F \\ -20 - 15 = 6 \cdot I_{m1} + (3 + 6 + 5) \cdot I_{m2} - 5 \cdot I_F \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 \cdot I_{m1} + 6 \cdot I_{m2} = 15 - 4 \cdot 4 = -1 \\ 6 \cdot I_{m1} + 14 \cdot I_{m2} = -35 + 5 \cdot 4 = -15 \end{cases}$$

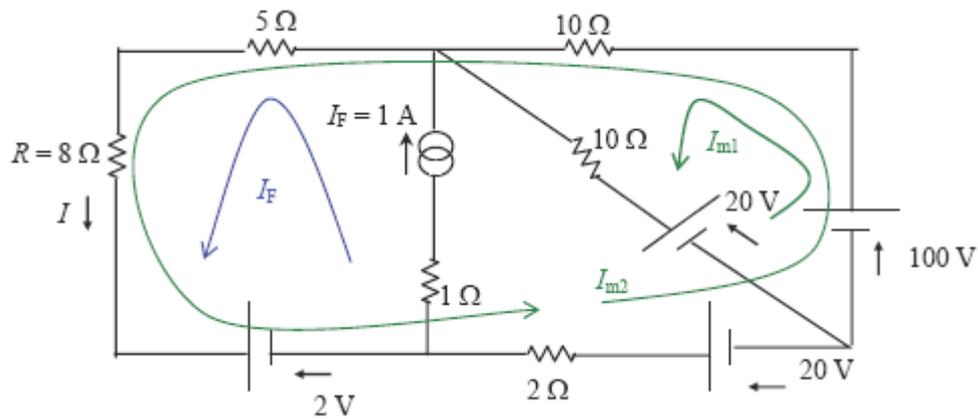
$$\begin{cases} I_{m1} = 0,31 \text{ A} \\ I_{m2} = -1,2 \text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = I_{m1} = 0,31 \text{ A} \\ I_2 = -I_{m2} = 1,2 \text{ A} \\ I_3 = -I_{m1} - I_{m2} = 0,89 \text{ A} \\ I_4 = I_{m1} + I_F = 4,31 \text{ A} \\ I_5 = I_F - I_{m2} = 5,2 \text{ A} \end{cases}$$

R : $I_1 = 0,31 \text{ A}$, $I_2 = 1,2 \text{ A}$, $I_3 = 0,89 \text{ A}$, $I_4 = 4,31 \text{ A}$ e $I_5 = 5,2 \text{ A}$

3.

Determinar a corrente I, usando o método das correntes de malhas independentes.



Resolução:

$$\begin{cases} 100 - 20 = (10 + 10) \cdot I_{m1} + 10 \cdot I_{m2} \\ 100 - 2 - 20 = 10 I_{m1} + (10 + 5 + 8 + 2) I_{m2} + (5 + 8) I_F \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 80 \\ 65 \end{vmatrix}$$

$$I_{m1} = \frac{\begin{vmatrix} 80 & 10 \\ 65 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}} = 3,38 \text{ A}$$

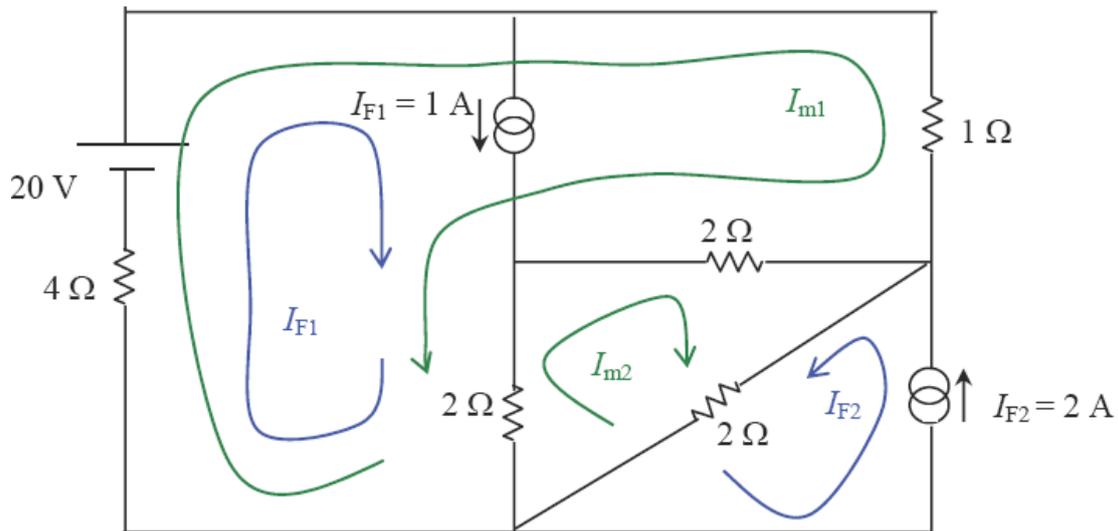
$$I_{m2} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 80 \\ 10 & 65 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}} = 1,25 \text{ A}$$

$$I = I_F + I_{m2} = 1 + 1,25 = 2,25 \text{ A}$$

R : I = 2,25 A

4.

Utilizar o método das correntes de malhas independentes para calcular as correntes de malha I_{m1} e I_{m2} .



$$\begin{cases} 20 = (4 + 1 + 2 + 2) \cdot I_{m1} - (2 + 2) \cdot I_{m2} + (4 + 2) \cdot I_{F1} \\ 0 = -(2 + 2) \cdot I_{m1} + (2 + 2 + 2) \cdot I_{m2} - 2 \cdot I_{F1} + 2 \cdot I_{F2} \end{cases}$$

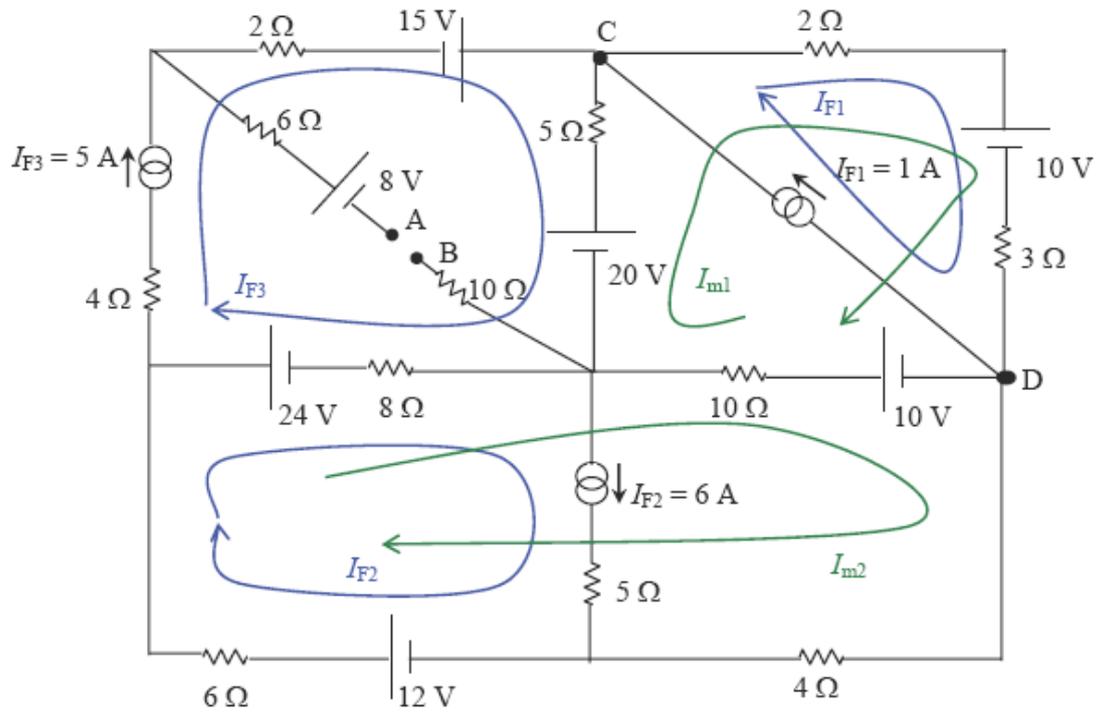
$$\begin{cases} 9 \cdot I_{m1} - 4 \cdot I_{m2} = 20 - 6 \cdot 1 = 14 \\ -4 \cdot I_{m1} + 6 \cdot I_{m2} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{m1} = 2 \text{ A} \\ I_{m2} = 1 \text{ A} \end{cases}$$

R : $I_{m1} = 2 \text{ A}$ e $I_{m2} = 1 \text{ A}$

5.

Utilizando o método das correntes de malhas independentes; determinar VCD.



$$\begin{cases} 20 - 10 + 10 = (5 + 2 + 3 + 10) \cdot I_{m1} - 10 \cdot I_{m2} + (2 + 3) \cdot I_{F1} - 5 \cdot I_{F3} \\ -24 - 10 + 12 = -10 \cdot I_{m1} + (10 + 4 + 6 + 8) \cdot I_{m2} + (6 + 8) \cdot I_{F2} - 8 \cdot I_{F3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20 \cdot I_{m1} - 10 \cdot I_{m2} = 20 - 5 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 40 \\ -10 \cdot I_{m1} + 28 \cdot I_{m2} = -22 + 14 \cdot 6 + 8 \cdot 5 = 102 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{m1} = 4,65 \text{ A} \\ I_{m2} = 5,35 \text{ A} \end{cases}$$

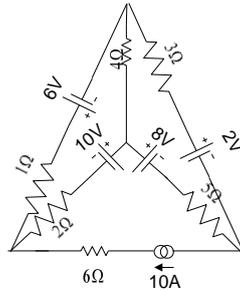
$$V_{CD} = (2 + 3) \cdot (I_{F1} + I_{m1}) + 10 = 5 \cdot 5,65 + 10 = 38,25 \text{ V}$$

R : $V_{CD} = 38,25 \text{ V}$

Exercícios Propostos:

1.

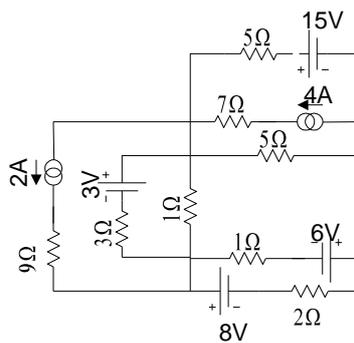
Dado o circuito, calcule as correntes nos ramos pelo método das correntes fictícias.



(Sol: $I_1 = 4A$, $I_2 = 6A$, $I_3 = 6A$, $I_4 = -2A$, $I_5 = 4A$, $I_6 = 10A$)

2.

- a) Determine as correntes nos ramos do circuito da figura, usando o método das correntes fictícias.
- b) Indique qual a potência fornecida pela fonte de corrente de 2A.

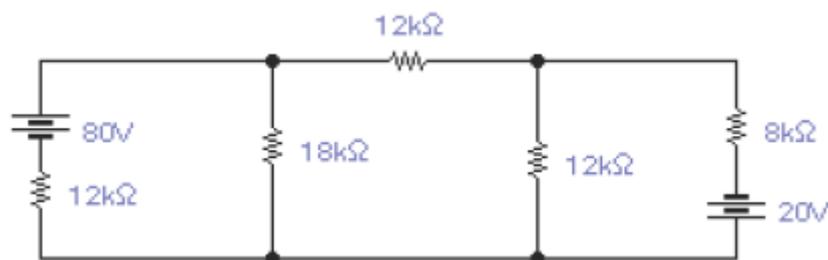


MÉTODO DAS TENSÕES NOS NÓS

Exercícios Resolvidos:

1.

Calcule todas as tensões e correntes do seguinte circuito pelo método das tensões nos nós.

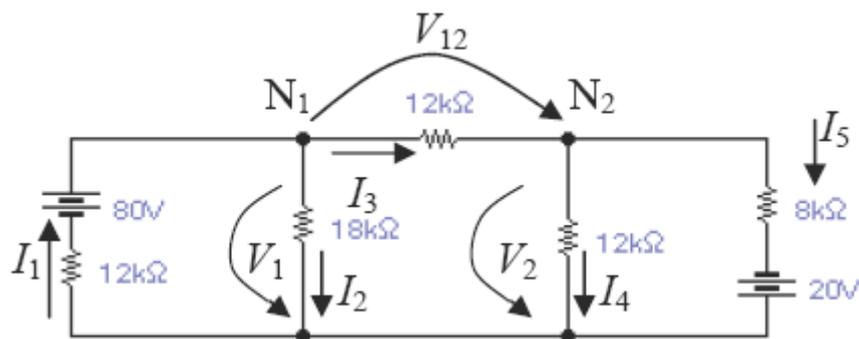


Resolução:

O circuito tem três nós e três malhas.

Identificamos os nós com N_1 e N_2 , sendo o terceiro (parte inferior da figura), considerado de referência, ligado à terra.

1ª Solução:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nó 1} \rightarrow I_1 = I_2 + I_3 \\ \text{nó 2} \rightarrow I_3 = I_4 + I_5 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 80 = V_1 + 12 \cdot 10^3 \cdot I_1 \\ V_1 = 18 \cdot 10^3 \cdot I_2 \\ V_{12} = V_1 - V_2 = 12 \cdot 10^3 \cdot I_3 \\ V_2 = 12 \cdot 10^3 \cdot I_4 \\ 20 = -V_2 + 8 \cdot 10^3 \cdot I_5 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{80 - V_1}{12 \cdot 10^3} \\ I_2 = \frac{V_1}{18 \cdot 10^3} \\ I_3 = \frac{V_1 - V_2}{12 \cdot 10^3} \\ I_4 = \frac{V_2}{12 \cdot 10^3} \\ I_5 = \frac{20 + V_2}{8 \cdot 10^3} \end{array} \right.$$

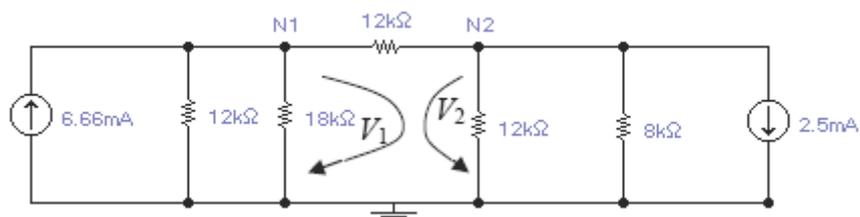
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{80}{12 \cdot 10^3} - \frac{V_1}{12 \cdot 10^3} = \frac{V_1}{18 \cdot 10^3} + \frac{V_1 - V_2}{18 \cdot 10^3} \quad (\text{nó 1}) \\ \frac{V_1 - V_2}{12 \cdot 10^3} = \frac{V_2}{12 \cdot 10^3} + \frac{20}{8 \cdot 10^3} + \frac{V_2}{8 \cdot 10^3} \quad (\text{nó 2}) \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema obtemos as soluções:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = 30 \text{ V} \\ V_2 = 0 \text{ V} \\ I_1 = 4,166 \text{ mA} \\ I_2 = 1,66 \text{ mA} \\ I_3 = 2,5 \text{ mA} \\ I_4 = 0 \text{ mA} \\ I_5 = 2,5 \text{ mA} \end{array} \right.$$

2ª Solução:

Transformamos as fontes de tensão em fontes de corrente e obtemos



Escrevemos agora as equações relativas aos nós

$$\begin{cases} -6,666 \cdot 10^{-3} + \frac{V_1}{12 \cdot 10^3} + \frac{V_1}{18 \cdot 10^3} + \frac{V_1 - V_2}{12 \cdot 10^3} = 0 \\ 2,5 \cdot 10^{-3} + \frac{V_2}{8 \cdot 10^3} + \frac{V_2}{12 \cdot 10^3} + \frac{V_2 - V_1}{12 \cdot 10^3} = 0 \end{cases}$$

cuja solução é idêntica à anterior:

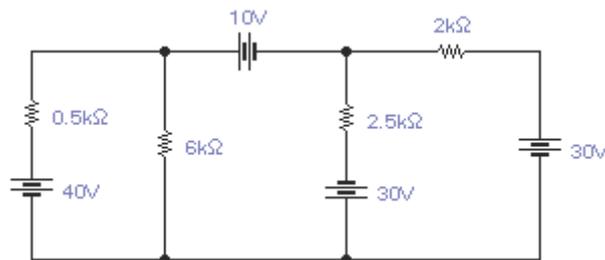
$$\begin{cases} V_1 = 30 \text{ V} \\ V_2 = 0 \text{ V} \\ I_1 = 4,166 \text{ mA} \\ I_2 = 1,66 \text{ mA} \\ I_3 = 2,5 \text{ mA} \\ I_4 = 0 \text{ mA} \\ I_5 = 2,5 \text{ mA} \end{cases}$$

R : $V_1 = 30 \text{ V}$, $V_2 = 0 \text{ V}$, $I_1 = 4,166 \text{ mA}$, $I_2 = 1,66 \text{ mA}$, $I_3 = 2,5 \text{ mA}$, $I_4 = 0 \text{ mA}$,

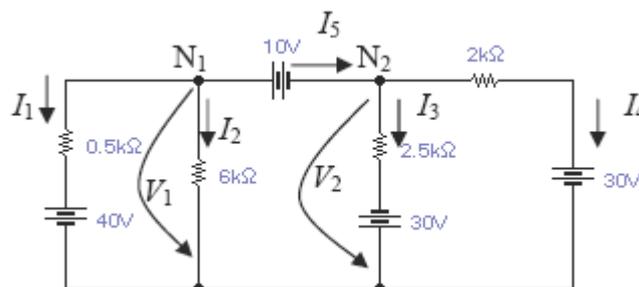
$I_5 = 2,5 \text{ mA}$

2.

Calcule todas as tensões e correntes do seguinte circuito pelo método das tensões nos nós.



Resolução:



1ª Solução:

$$\begin{cases} 40 = -500 \cdot I_1 + V_1 \\ V_1 = 6000 \cdot I_2 \\ I_1 + I_2 + I_5 = 0 \\ I_5 = I_3 + I_4 \\ 30 = 2500 \cdot I_3 - V_2 \\ 30 = -2000 \cdot I_4 + V_2 \\ V_1 = V_2 + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{V_1 - 40}{500} + \frac{V_1}{6000} + \frac{30 + V_2}{2500} + \frac{V_2 - 30}{2000} = 0 \\ V_1 = V_2 + 10 \end{cases}$$

que resolvendo dá $V_1=30$ V e portanto $V_2=20$ V

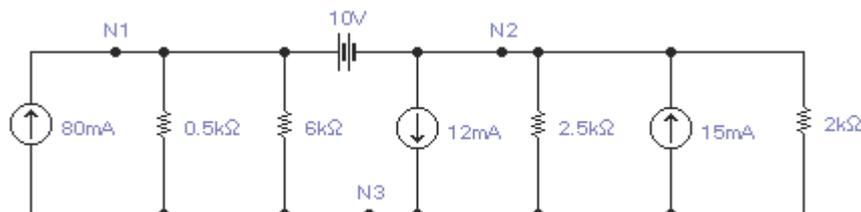
As correntes calculam-se agora facilmente, obtendo então $I_1 = -20$ mA, $I_2 = 5$ mA,

$I_3 = 20$ mA e $I_4 = -5$ mA, $I_5 = I_3+I_4 = -I_1-I_2 = 15$ mA

2ª Solução:

Transformemos as fontes de tensão em fontes de corrente.

Observação: a fonte de tensão de 10 V não pode ser transformada em fonte de corrente por não ter resistência em série



Há três nós designados por 1, 2 e 3. Consideraremos o nó 3 como referência. Entre o nó 1 e o nó 2 há uma diferença de tensão de 10 V, $V_1 = V_2+10$, ou seja, a tensão de um determina a tensão do outro.

Dão portanto origem a uma única equação:

$$-80 + \frac{V_1}{0,5} + \frac{V_1}{6} + \frac{V_1 - 10}{2,5} + \frac{V_1 - 10}{2} + 12 - 15 = 0$$

que resolvendo dá $V_1 = 30 \text{ V}$ e portanto $V_2 = 20 \text{ V}$.

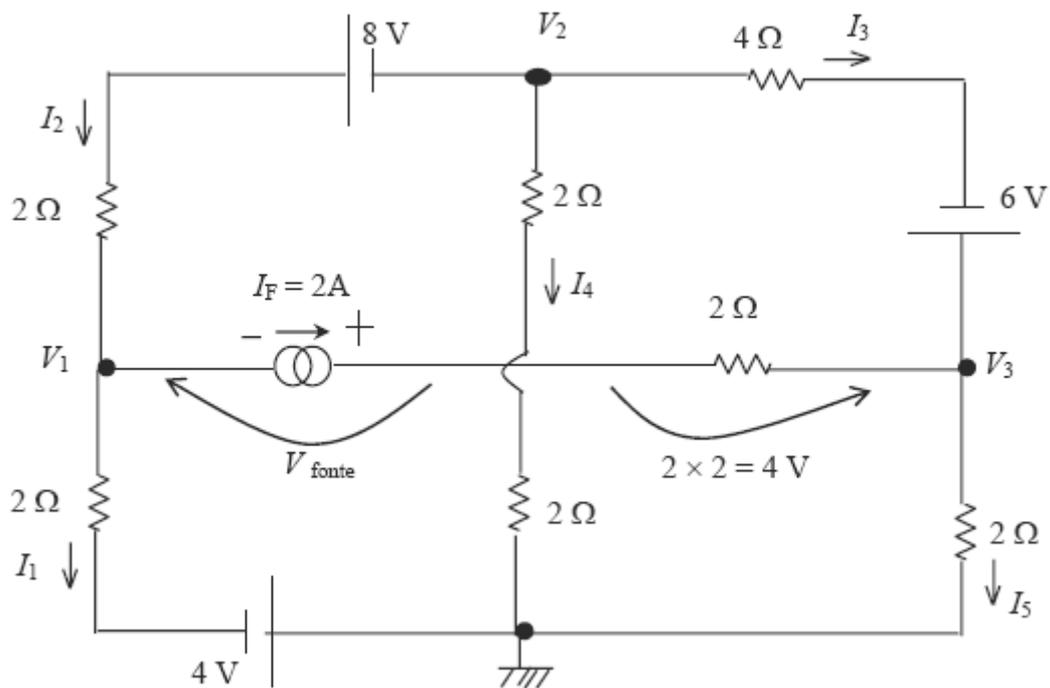
As correntes calculam-se agora facilmente, obtendo então $I_1 = -20 \text{ mA}$, $I_2 = 5 \text{ mA}$,

$I_3 = 20 \text{ mA}$ e $I_4 = -5 \text{ mA}$, $I_5 = I_3 + I_4 = -I_1 - I_2 = 15 \text{ mA}$.

R : $I_1 = -20 \text{ mA}$, $I_2 = 5 \text{ mA}$, $I_3 = 20 \text{ mA}$, $I_4 = -5 \text{ mA}$ e $I_5 = 15 \text{ mA}$.

3.

Calcular a potência fornecida pela fonte de corrente



$$P_{\text{fornecida pela fonte}} = V_{\text{fonte}} \cdot I_F$$

$$V_{\text{fonte}} = V_{31} + 4 = V_3 - V_1 + 4$$

Determinação de V_1 e V_3 pelo método da tensão nos nós

$$\text{equações de nós} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nó 1} \rightarrow 2 = I_2 - I_1 \\ \text{nó 2} \rightarrow 0 = I_2 + I_3 + I_4 \\ \text{nó 3} \rightarrow I_5 = 2 + I_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = -V_1 + 2I_1 \rightarrow I_1 = \frac{4 + V_1}{2} = 2 + \frac{V_1}{2} \\ 8 = 2I_2 + V_{12} \rightarrow I_2 = \frac{8 - (V_1 - V_2)}{2} = \frac{8 + V_2 - V_1}{2} = 4 + \frac{V_2}{2} - \frac{V_1}{2} \\ 6 = 4I_3 + V_{32} \rightarrow I_3 = \frac{6 - (V_3 - V_2)}{4} = \frac{6 + V_2 - V_3}{4} = \frac{3}{2} + \frac{V_2}{4} - \frac{V_3}{4} \\ 0 = V_2 - 4I_4 \rightarrow I_4 = \frac{V_2}{4} \\ 0 = V_3 - 2I_5 \rightarrow I_5 = \frac{V_3}{2} \end{array} \right.$$

e substituindo as correntes (I_x) nas equações de nós

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = 4 + \frac{V_2}{2} - \frac{V_1}{2} - 2 - \frac{V_1}{2} \\ 4 + \frac{V_2}{2} - \frac{V_1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{V_2}{4} - \frac{V_3}{4} + \frac{V_2}{4} = 0 \\ 2 + \frac{3}{2} + \frac{V_2}{4} - \frac{V_3}{4} = \frac{V_3}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = -V_1 + \frac{1}{2}V_2 + 0V_3 \\ \frac{11}{2} = 5,5 = \frac{V_1}{2} - V_2 + \frac{V_3}{4} \\ \frac{7}{2} = 3,5 = 0V_1 - \frac{V_2}{4} + \frac{3}{4}V_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 5,5 \\ \hline 3,5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline \end{array} \times \underbrace{\begin{array}{|ccc|} \hline -1 & 0,5 & 0 \\ \hline 0,5 & -1 & 0,25 \\ \hline 0 & -0,25 & 0,75 \\ \hline \end{array}}_{0,75 - (0,5^2 \times 0,75) - 0,25^2 = 0,5}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 5,5 & -1 & 0,25 \\ 3,5 & -0,25 & 0,75 \end{vmatrix}}{0,5} = -3,25 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 5,5 & 0,25 \\ 0 & 3,5 & 0,75 \end{vmatrix}}{0,5} = -6,5 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 5,5 \\ 0 & -0,25 & 3,5 \end{vmatrix}}{0,5} = 2,5 \text{ V}$$

$$V_{\text{fonte}} = V_3 - V_1 + 4 = 2,5 - (-3,25) + 4 = 9,75 \text{ V}$$

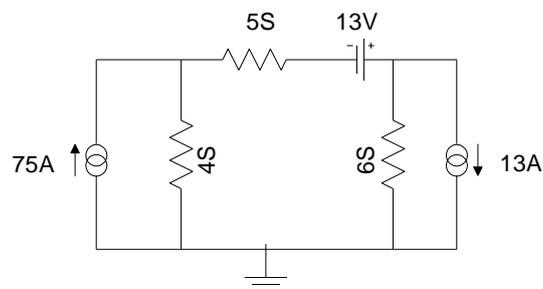
$$P_{\text{fornecida pela fonte}} = V_{\text{fonte}} \cdot I_F = 9,75 \cdot 2 = 19,5 \text{ W}$$

R : P fornecida pela fonte = 19,5 W

Exercícios Propostos:

1.

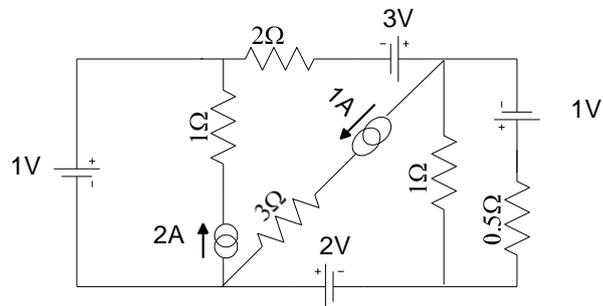
Determine o valor das tensões nos nós do circuito da figura, usando o método das tensões nos nós.



(Sol: $V_1 = 5\text{V}$, $V_2 = 7\text{V}$)

2.

Determine o valor das correntes nos ramos do circuito da figura usando o método das tensões nos nós.

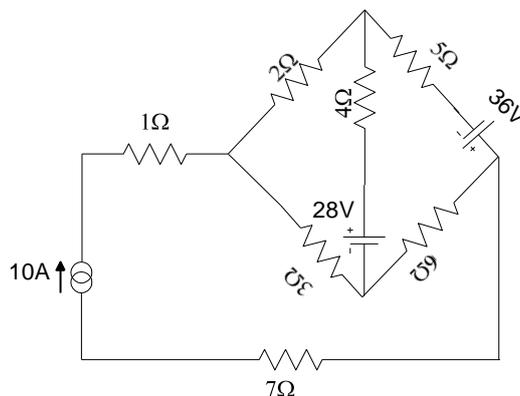


(Sol: $I_1 = 1A$, $I_2 = 3A$, $I_3 = 0A$, $I_4 = 2A$, $I_5 = 2A$)

3.

Para o circuito da figura,

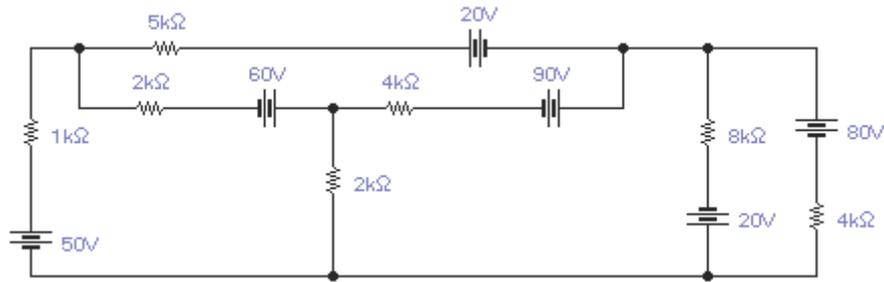
- Escreva um sistema de equações que permita resolver o circuito a partir das leis de Kirchoff.
- Calcule as correntes nos ramos pelo método das correntes fictícias e tensões nos nós.
- Calcule as correntes nos ramos pelo teorema da sobreposição.
- Verifique o princípio de conservação de energia no circuito.



(Sol: $I_1 = 10A$, $I_2 = 4.42A$, $I_3 = 5.58A$, $I_4 = -5.02A$, $I_5 = 9.44A$, $I_6 = 0.56A$)

4.

Calcule as tensões em todos os nós do seguinte circuito (use o método das tensões nos nós).



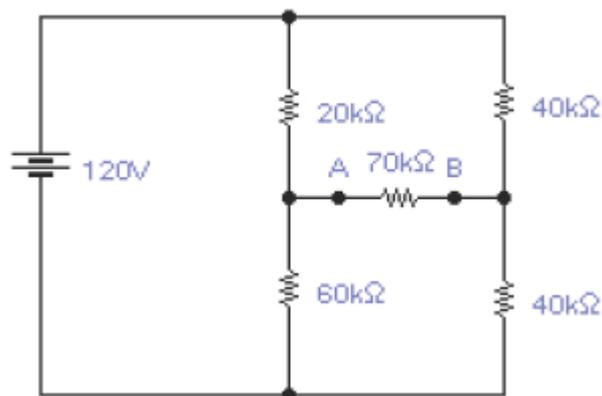
TEOREMAS DE THÈVENIN E NORTON

Exercícios Resolvidos:

1.

Calcule o circuito equivalente ao circuito dado utilizando o teorema de Thèvenin.

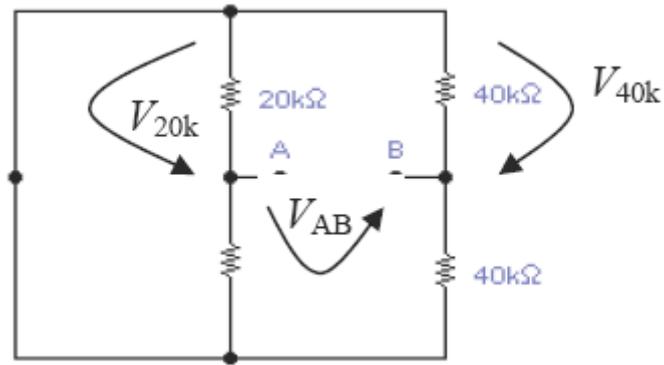
Determine a tensão e a corrente na resistência de carga de 70 kΩ.



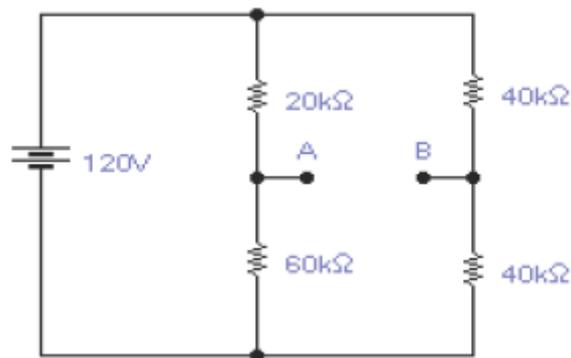
Resolução:

Cálculo da resistência de Thèvenin

$$R_{Th} = (20 \cdot 10^3 // 60 \cdot 10^3) + (40 \cdot 10^3 // 40 \cdot 10^3) = 35 \text{ k}\Omega$$



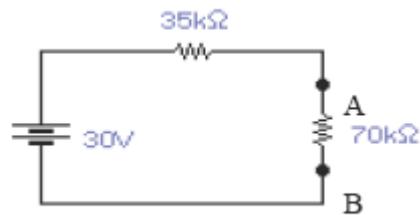
Cálculo da tensão de Thèvenin $V_{Th}=V_{AB}$



$$V_{Th} = V_{AB} = V_{40k} - V_{20k}$$

$$V_{Th} = \frac{120 \cdot 40 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10^3} - \frac{120 \cdot 20 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3 + 60 \cdot 10^3} = 30 \text{ V}$$

O circuito equivalente será então



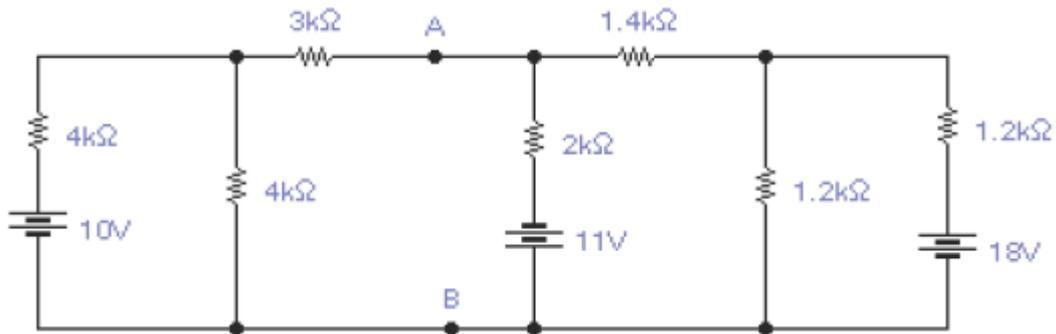
$$I = 30 / (35 \cdot 10^3 + 70 \cdot 10^3) = 0,28 \text{ mA}$$

$$V = I \cdot 70 \cdot 10^3 = 20 \text{ V}$$

$$R: I = 0,28 \text{ mA e } V = 20 \text{ V}$$

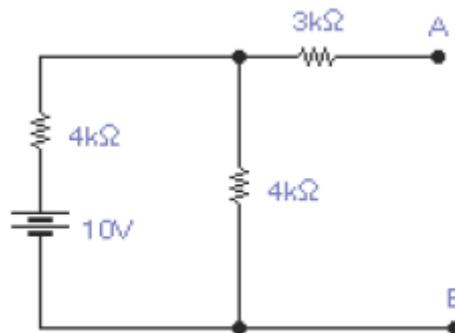
2.

Calcule o circuito equivalente de Thèvenin, (para ambos os lados) relativamente aos pontos A e B no circuito dado. No circuito equivalente, determine a corrente que flui entre os pontos A e B.



Resolução:

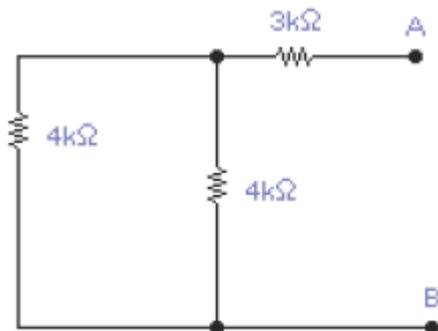
Lado esquerdo



Podemos calcular já a partir deste circuito a tensão de Thèvenin

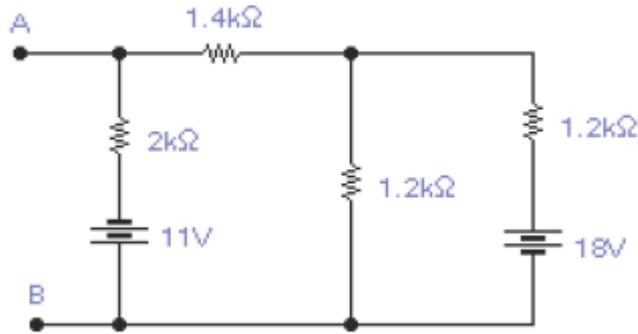
$$V_{Th} = 10 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot (4 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3) = 5 \text{ V}$$

A resistência será calculada a partir de



$$R_{Th} = (4 \cdot 10^3 // 4 \cdot 10^3) + 3 \cdot 10^3 = 5 \text{ k}\Omega$$

Lado direito:

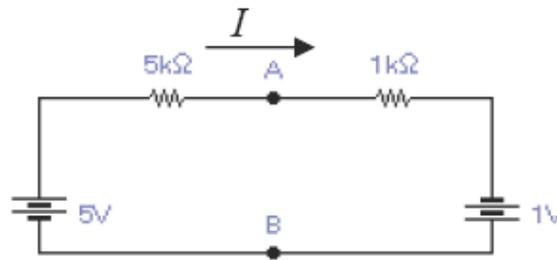


A tensão de Thèvenin será calculada analisando este circuito

$$V_{Th} = -1 \text{ V}$$

Sendo calculada facilmente $R_{Th} = 1 \text{ k}\Omega$

O circuito equivalente será



A corrente que percorre o circuito será:

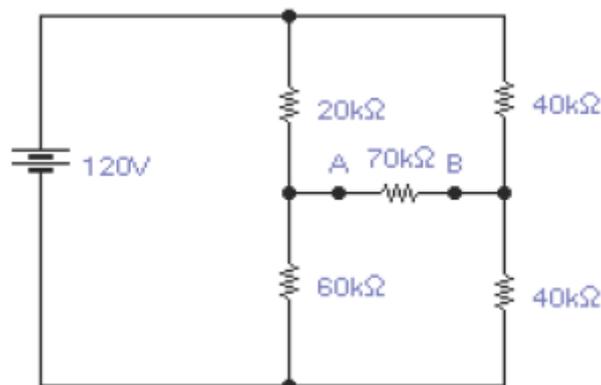
$$I = (5 + 1) / (5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3) = 1 \text{ mA}$$

R: $V_{Th_direito} = 5 \text{ V}$, $R_{Th_direito} = 5 \text{ k}\Omega$, $V_{Th_esquerdo} = -1 \text{ V}$, $R_{Th_esquerdo} = 1 \text{ k}\Omega$,

3.

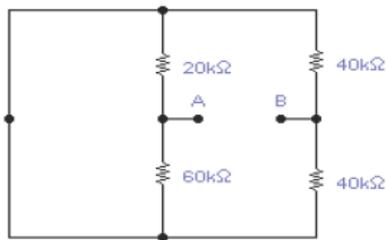
Calcule o circuito equivalente ao circuito dado utilizando o teorema de Norton.

Determine a tensão e a corrente na resistência de carga de 70 kΩ.



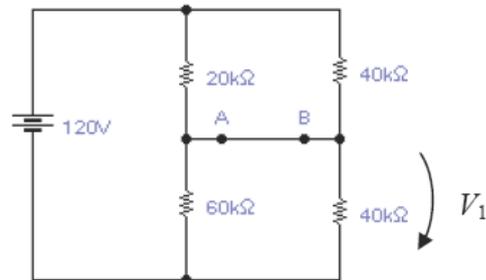
Resolução:

Cálculo da resistência de Norton:



$$R_N = (20 \cdot 10^3 // 60 \cdot 10^3) + (40 \cdot 10^3 // 40 \cdot 10^3) = 35 \text{ k}\Omega$$

Cálculo da corrente de Norton ($I_N = I_{AB}$):



$$I_N = I_{20k} - I_{60k}$$

$$V_1 = 120 \cdot \frac{(60 \cdot 10^3 // 40 \cdot 10^3)}{(20 \cdot 10^3 // 40 \cdot 10^3) + (60 \cdot 10^3 // 40 \cdot 10^3)} = 77,15 \text{ V (divisor de tensão)}$$

$$I_{20k} = \frac{120 - 77,15}{20 \cdot 10^3} = 2,14 \text{ mA}$$

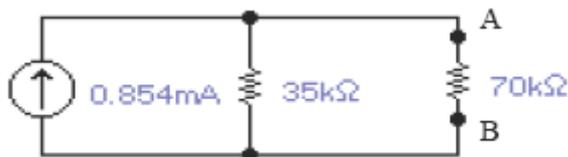
$$I_{60k} = \frac{77,15}{60 \cdot 10^3} = 1,29 \text{ mA}$$

$$I_N = 2,14 \cdot 10^{-3} - 1,29 \cdot 10^{-3} = 0,854 \text{ mA}$$

O circuito equivalente será então:

$$I_{AB} = 0,854 \cdot 10^{-3} \cdot 35 \cdot 10^3 / (35 \cdot 10^3 + 70 \cdot 10^3) = 0,28 \text{ mA}$$

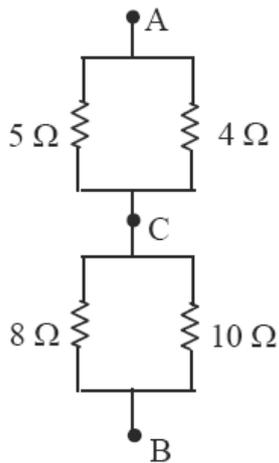
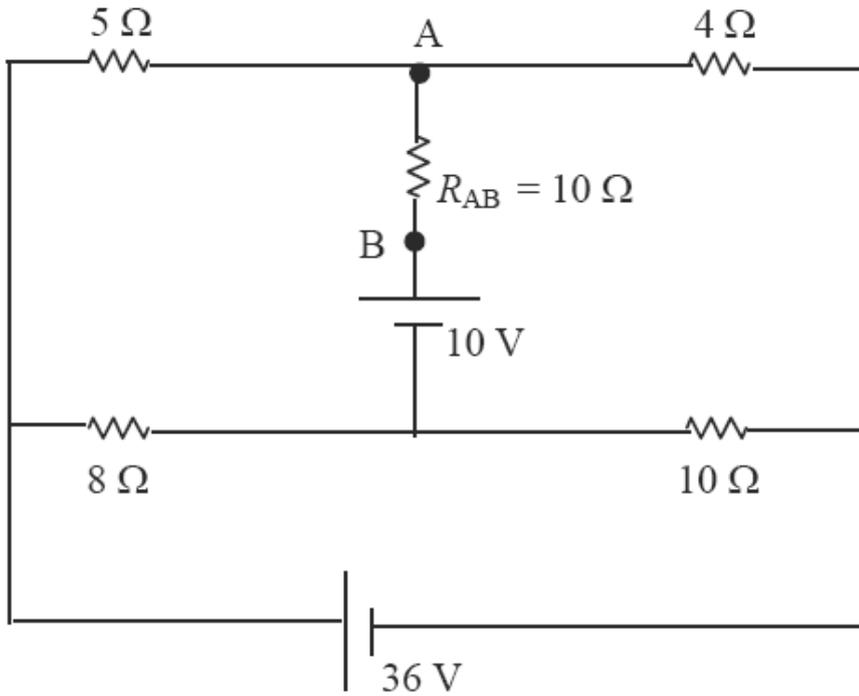
$$V_{AB} = I_{AB} \cdot 70 \cdot 10^3 = 20 \text{ V}$$



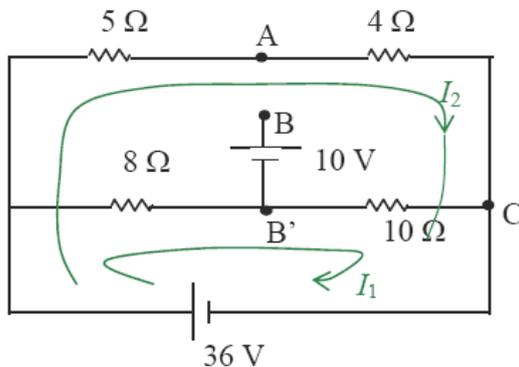
R: $I_N = 0,85 \text{ mA}$, $R_N = 70 \text{ k}\Omega$, $V_{AB} = 20 \text{ V}$ e $I_{AB} = 0,28 \text{ mA}$

4.

Determinar a corrente na resistência $R_{AB} = 10 \Omega$, utilizando o teorema de Thèvenin.



$$R_{Th} = (5 // 4) + (8 // 10) = \frac{20}{9} + \frac{80}{18} = 6,6 \Omega$$

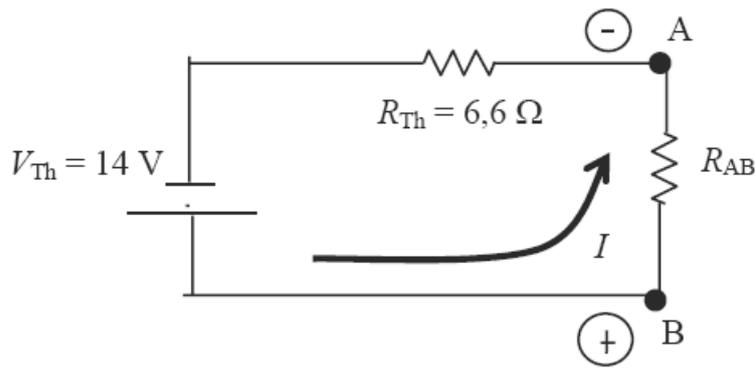


$$I_1 = \frac{36}{18} = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{36}{9} = 4 \text{ A}$$

$$(V_{AB})_{c.a.} = (V_{AC})_{c.a.} + (V_{CB'})_{c.a.} + (V_{B'B})_{c.a.}$$

$$V_{Th} = (V_{AB})_{c.a.} = 4 \cdot I_2 + 10 \cdot (-I_1) - 10 = 4 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - 10 = -14 \text{ V} \Rightarrow V_{BA} = 14 \text{ V}$$



$$14 = (R_{AB} + R_{Th}) I$$

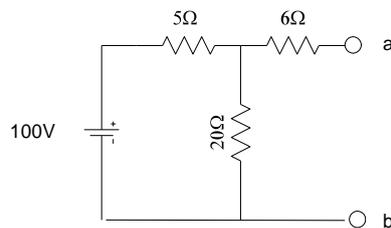
$$I = 0,84 \text{ A}$$

R: I=0,84 A

Exercícios Propostos:

1.

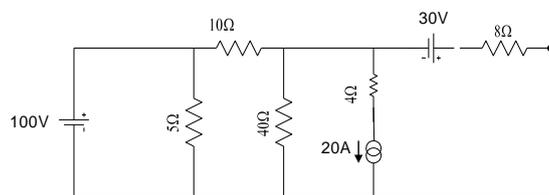
Diga qual o valor da resistência que solicita uma corrente de 5A quando ligada aos terminais a e b do circuito da figura.



(Sol: R = 6 Ω)

2.

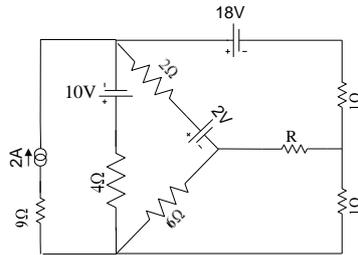
Encontre o equivalente de Norton para o seguinte circuito:



(Sol: $R_{th} = 16\Omega$, $V_{th} = -50V$)

3.

Para o circuito da figura:

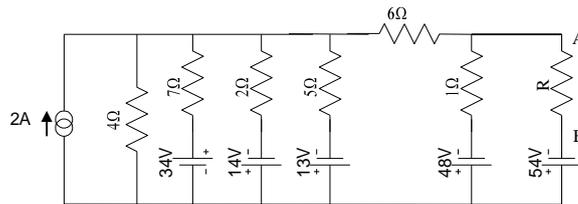


- a) Determine R de modo que a corrente que a percorre seja de 1A.
- b) Confirme o valor obtido em a).

(Sol: $R = 7.93 \Omega$)

4.

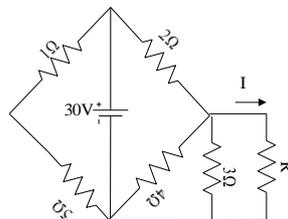
Determine R para que a corrente que nela passa seja de 2A de A para B.



(Sol: $R = 5 \Omega$)

5.

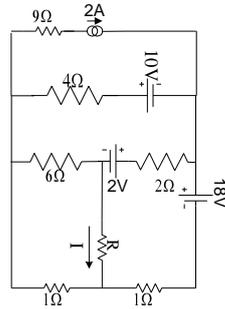
Usando o teorema de Thèvenin, calcular R de modo que a corrente que nela passa seja de 2A.



(Sol: $R = 6 \Omega$)

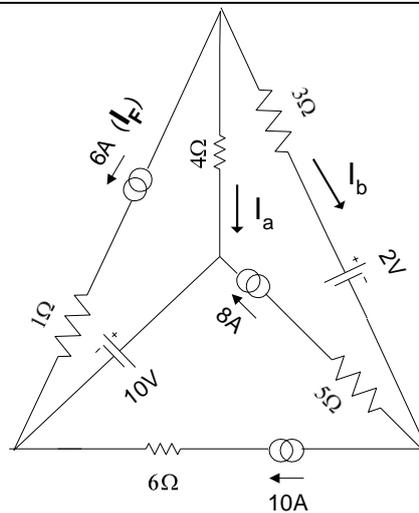
6.

Utilizando o Teorema de Thèvenin, calcule o valor de R no circuito da figura, de modo que a corrente que a percorre seja 1A.



7.

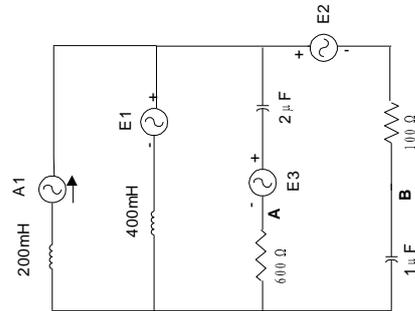
Considere o circuito da figura.



- Utilizando o método das tensões nos nós, determine os valores de I_a e I_b .
- Que alterações introduziria no circuito, se pretendesse diminuir a potência fornecida pela fonte de corrente I_F para 50% do seu valor actual, mantendo o valor de I_F e não alterando as potências fornecidas pelas outras fontes.

8.

Determine o equivalente de Thèvenin do circuito da figura, visto dos terminais A e B.



$$E1 = 10 / \underline{0^\circ} \text{ V}$$

$$E2 = 18 / \underline{30^\circ} \text{ V}$$

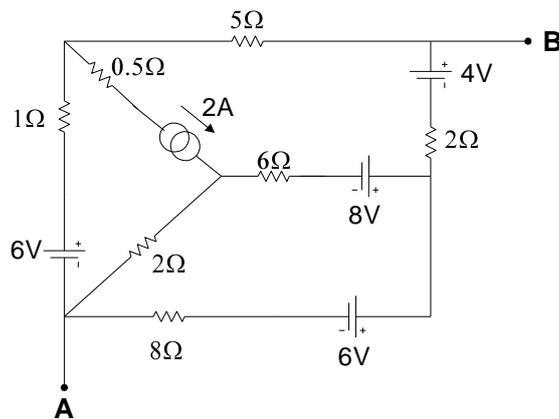
$$E3 = 2 / \underline{0^\circ} \text{ V}$$

$$A1 = 2 / \underline{45^\circ} \text{ A}$$

$$f = 50\text{Hz}$$

9.

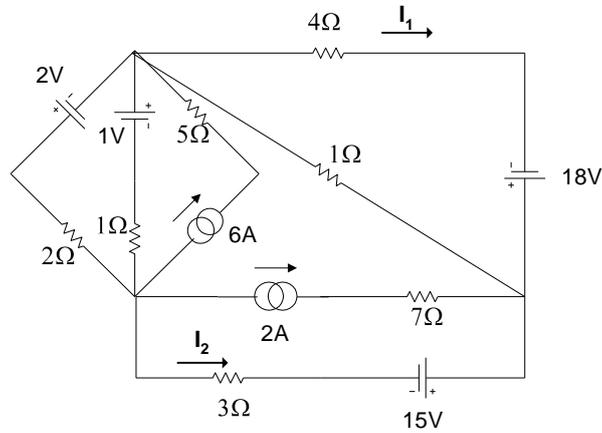
Calcule o equivalente de Thèvenin e Norton do bipolo AB, a partir do Teorema de Thèvenin. Use como método auxiliar, o método das correntes de malhas independentes (método das correntes fictícias).



10.

Para o circuito da figura, calcule:

- As correntes I_1 e I_2 , usando o método das tensões nos nós.
- A potência em jogo na fonte de tensão de 1V e na fonte de corrente de 2A.



11.

Calcule, utilizando o teorema de Thèvenin, o circuito equivalente ao circuito dado visto de R_L . Calcule a corrente e a tensão em R_L .

