VETORES E QUANTIDADES COMPLEXAS

Quando se fala do comprimento de um corpo, de sua massa ou ainda do seu volume, nada mais é necessário do que o valor numérico de cada uma dessas grandezas, acompanhado da respectiva unidade, para que se tenha uma idéia exata do que se deseja informar. Grandezas deste tipo são chamadas ESCALARES.

Outras grandezas, chamadas VETORIAIS, só são perfeitamente entendidas quando delas conhecemos não só o valor numérico, como também outras informações, tais como direção, sentido e ponto de aplicação. Por exemplo, só é possível saber o que acontece com um corpo submetido a uma força quando se conhece o valor dessa força, a direção em que atua e o sentido de sua ação. Da mesma forma, não podemos dizer que dois carros têm a mesma velocidade somente porque as leituras dos seus velocímetros são iguais. Isto, porque seus movimentos podem ter direções e sentidos diferentes.

As grandezas vetoriais são representadas graficamente com o auxílio de segmentos de reta orientados, chamados VETORES (esta a razão da expressão GRANDEZAS VETORIAIS).

O comprimento do pedaço de reta é usado para representar o valor (MÓDULO) da grandeza. Evidentemente, para que se tenha uma noção exata do que está sendo representado, é necessário fazer o desenho obedecendo a uma determinada escala. A seta numa das extremidades representa o sentido, e o próprio segmento de reta indica a direção. É interessante ter em mente a distinção entre direção e sentido, lembrando que cada direção (horizontal, vertical e inclinada) admite dois sentidos.

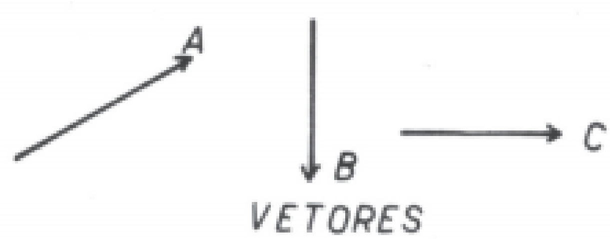


FIG. XXII-1

Os vetores são normalmente referidos a um eixo de referência, isto é, sua posição é determinada em relação a um eixo de referência.

Para designar um vetor com uma letra, utiliza-se um ponto sob a mesma. Assim, Ẹ lê-se "vetor E". Outras notações são também usadas, tal como uma pequena flecha colocada sobre a letra correspondente ao vetor:

$$\vec{I} = \text{vetor } I$$

Tendo em vista o objetivo do nosso estudo, limitaremos nossas observações aos vetores que representam grandezas de direções iguais (sentidos iguais ou opostos) e grandezas cujas direções formam ângulos.

Para tornar mais compreensível o assunto em questão, raciocinemos com forças, que são grandezas vetoriais de fácil aceitação.

Se várias forças agem sobre um mesmo corpo, todas na mesma direção e no mesmo sentido, seus valores se somam. O vetor que representa essa soma deve ter comprimento igual à soma dos comprimentos dos vetores que representam as forças parciais, bem como direção e sentido iguais.

Quando as forças têm direções iguais, mas seus sentidos são opostos, a força total que age sobre o corpo é a diferença entre a soma das forças com um dos sentidos e a soma das forças com o outro sentido. O vetor que representa essa resultante tem comprimento igual à diferença entre os comprimentos dos vetores que representam as somas parciais.

Quando as direções dos vetores formam ângulos, como no caso de várias forças atuando sobre o mesmo corpo, aplicadas ao mesmo ponto, o vetor resultante pode ser obtido construindo-se um paralelogramo com as direções das forças e traçando-se uma diagonal a partir do ponto comum aos vetores.

Consideremos os vetores V_1 e V_2

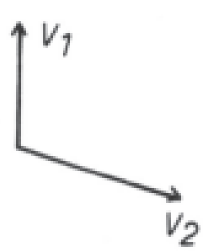


FIG. XXII-2

Construindo o paralelogramo, e traçando a diagonal

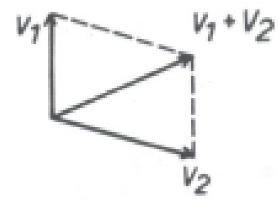


FIG. XXII-3

obtemos o vetor $V_1 + V_2$ que representa a soma dos vetores considerados.

A soma de três ou mais vetores angulares é obtida compondo-se dois vetores quaisquer, em seguida somando o primeiro resultado obtido com um terceiro vetor e assim sucessivamente:

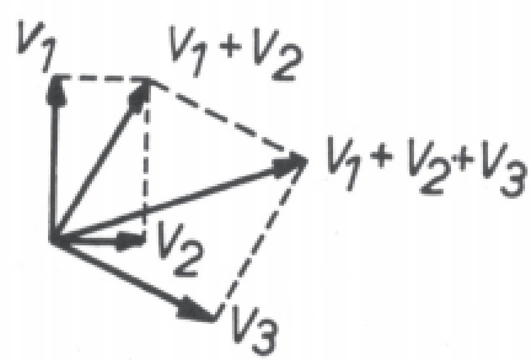


FIG. XXII-4

Representação Vetorial de Ondas Senoidais

Não é muito conveniente a combinação de ondas senoidais para a resolução gráfica de circuitos de C.A.

É muito mais prático o emprego de vetores para a representação das grandezas senoidais que variam com o tempo.

Uma senóide pode ser considerada como o desenvolvimento em coordenadas retangulares de um vetor de grandeza invariável, que gira em sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, com velocidade angular constante.

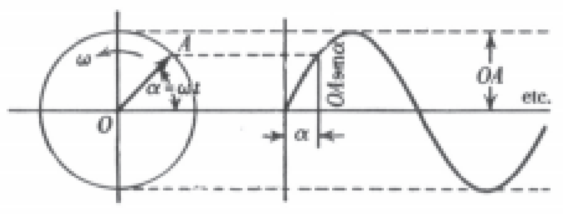


FIG. XXII-5

Apesar da grande vantagem da solução gráfica que os vetores podem proporcionar, aliada à aplicação de relações trigonométricas, é ainda muito mais prático o uso de vetores em coordenadas polares e em coordenadas retangulares.

Vetores em Coordenadas Polares

Um vetor pode ser expresso pela sua grandeza e pelo ângulo que forma com um eixo de referência. Definido deste modo, dizemos que está na FORMA POLAR ou em COORDENADAS POLARES.

Na figura acima temos o vetor E, que forma um ângulo φ com eixo horizontal positivo, normalmente tomado como eixo de referência. Sua representação na forma polar é a seguinte:

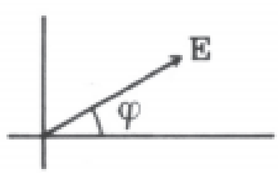


FIG. XXII-6

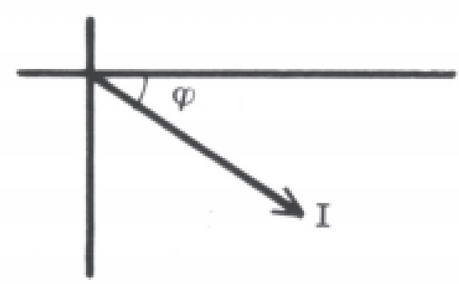
$$\underset{\cdot}{E} = E \angle \underline{\varphi}$$

A letra E sem o ponto corresponde ao MÓDULO DO VETOR, isto é, seu valor numérico. A outra parte da representação do vetor é o seu ARGUMENTO, o ângulo que faz com o eixo de referência.

A simbologia em questão não representa o produto do módulo pelo argumento; apenas dá as coordenadas polares do vetor.

Os ângulos que os vetores formam com o eixo de referência são considerados do mesmo modo que em trigonometria: positivos, no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio, e negativos no caso contrário. O plano de coordenadas corresponde, por convenção, a 360 graus elétricos, de modo que uma rotação completa do vetor, a partir do eixo horizontal direito, simboliza a seqüência de valores por que passa uma grandeza senoidal em um ciclo.

Quando o argumento do vetor é negativo, esta condição pode ser expressa em uma das formas abaixo:



$$\underset{\bullet}{I} = I \angle \underline{-\varphi}$$

ou

$$\underset{\bullet}{I} = I \, \overline{\diagdown \varphi}$$

FIG. XXII-7

Vetores em Coordenadas Retangulares

Um vetor também pode se representado pelas suas projeções (componentes horizontal e vertical) num sistema de coordenadas retangulares:

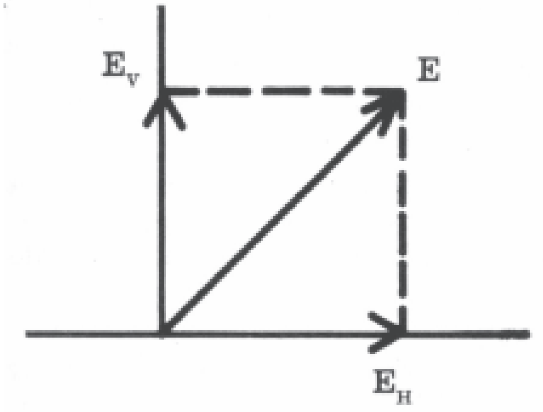


FIG. XXII-8

Mas, como indicar o vetor, sem fazer o desenho?

Isto se consegue com o auxílio de uma quantidade chamada “OPERADOR j”.

Consideremos a figura

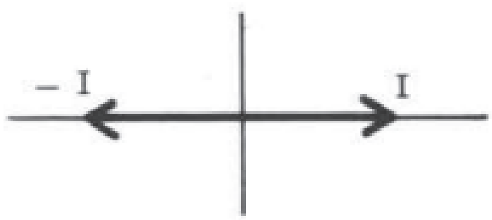


FIG. XXII-9

onde temos o vetor I sobre o eixo de referência, à direita do eixo vertical. O mesmo vetor colocado no eixo horizontal à esquerda do eixo vertical é designado por –I; isto significa que para fazer um vetor girar 180º no sentido considerado positivo basta multiplicá-lo por –1.

E se desejássemos que o vetor se deslocasse apenas 90º?

Sabemos que –1 é o mesmo que $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ e, portanto, podemos dizer que um vetor multiplicado por $\sqrt{-1}$ e em seguida novamente por $\sqrt{-1}$ gira 180º; se o mesmo vetor fosse multiplicado apenas uma vez por $\sqrt{-1}$, ele seria deslocado apenas 90º.

A expressão $\sqrt{-1}$, simbolizada pela letra “j”, é conhecida como um operador; qualquer vetor multiplicado por “j” experimenta uma rotação de 90º, no sentido positivo convencionado.

De acordo com as expressões abaixo, um vetor situado sobre os eixos vertical (positivo e negativo) e horizontal (positivo e negativo) será designado de conformidade com a figura XXII-10.

$\sqrt{-1} = j$
$j^2 = -1$
$j^3 = -j$
$j^4 = -j^2 = 1$

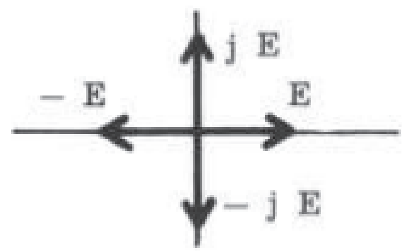


FIG. XXII-10

Vê-se que o operador “j”, sob um ponto de vista não matemático, é um símbolo que, acompanhando um vetor, serve para indicar sua posição num sistema de eixos retangulares. Se a letra (ou valor) correspondente ao vetor está acompanhada de +j, sabemos que o vetor está no eixo vertical, para cima; se está precedida de –j, está no eixo vertical, para baixo. Sem o “j”, o vetor está no eixo horizontal, à direita ou à esquerda, conforme o sinal.

A representação do vetor na forma retangular, também chamada BINÔMIA ou COMPLEXA, é feita conforme mostram os exemplos abaixo:

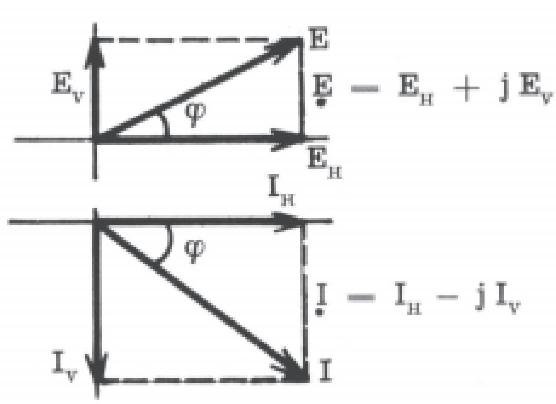


FIG. XXII-11

Sabemos que

$$E_H = E \cos \varphi \qquad I_H = I \cos \varphi$$
$$E_V = E \operatorname{sen} \varphi \qquad I_V = I \operatorname{sen} \varphi$$

logo, podemos escrever que

$$\dot{E} = E \cos \varphi + j\, E \operatorname{sen} \varphi$$

$$\dot{I} = I \cos \varphi - j\, I \operatorname{sen} \varphi$$

Conversão de Forma Polar em Retangular e Vice-Versa

As componentes do vetor, num sistema de eixos retangulares, formam com o próprio vetor um triângulo-retângulo, o que nos permite escrever as expressões abaixo, relativas aos MÓDULOS dos vetores utilizados nos exemplos que acabamos de dar:

$$E = \sqrt{E_H^2 + E_V^2}$$

$$I = \sqrt{I_H^2 + I_V^2}$$

Os argumentos dos vetores em questão podem ser determinados a partir da tangente, o que se faz do seguinte modo:

$$\angle \text{arc tg } E_V/E_H \quad \text{e} \quad \angle \text{arc tg } {-I_V}/I_H$$

arc tg = lê-se "arco ou ângulo cuja tangente é...

Assim, a transformação de um vetor da forma binômia para a forma polar é procedida conforme mostram os dois exemplos abaixo:

$$\dot{E} = E_H + jE_V =$$
$$= \sqrt{E_H^2 + E_V^2} \quad \angle \text{arc tg } E_V/E_H$$

$$\dot{I} = 30 + j50 = \sqrt{30^2 + 50^2}$$

$$\angle \text{arc tg } 50/30 = 58{,}3 \angle 59^o$$

A transformação da forma polar em retangular é simples aplicação das relações trigonométricas num triângulo-retângulo:

$$\dot{E} = E \angle \alpha = E \cos \alpha + j\, E \operatorname{sen} \alpha$$

$$\dot{I} = 220 \angle 120^o = 220 \cos\ 120 +$$
$$+ j\, 220 \operatorname{sen} 120^o = -110 + j\, 190{,}5$$

Operações com Vetores na Forma Polar

Não é possível somar ou subtrair quantidades vetoriais na forma polar. Primeiramente devem ser convertidas na forma retangular ou binômia e, em seguida, efetuadas as operações.

A multiplicação e a divisão de vetores na forma polar são, porém, operações bem simples.

Para multiplicar, basta multiplicar os módulos e somar os argumentos.

Exemplo: determinar o produto dos vetores $\dot{A} = 3 \angle 10^o$, $\dot{B} = 2 \angle -20^o$ e $\dot{C} = 4 \angle -5^o$

$$\dot{A} \times \dot{B} \times \dot{C} = 3 \angle 10^o \times 2 \angle -20^o \times$$
$$\times 4 \angle 5^o = 24 \angle -5^o$$

Para dividir, basta efetuar a divisão indicada com os módulos; o argumento do quociente é igual ao argumento do dividendo menos o do divisor.

Exemplo: dividir $\dot{V} = 100 \angle 30^o$ por $\dot{I} = 20 \angle 120^o$

$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{100 \angle 30^o}{20 \angle 120^o} = 5 \angle -90^o$$

Operações com Vetores na Forma Retangular

A soma, a subtração e a multiplicação de vetores nesta forma obedecem às regras de Álgebra.

Exemplos:

1) Somar os vetores 15 + j 20, –2 + + j4 e –3 – j 2.

$$\begin{array}{r} 15 + j\,20 \\ -2 + j\,24 \\ \underline{-3 - j\,2} \\ 10 + j\,22 \end{array}$$

2) Do vetor 5 – j 4 subtrair o vetor 3 – j2.

$$\begin{array}{r} 5 - j\,4 \\ -\,3 = j\,2 \\ 2 - j\,2 \end{array}$$

3) Multiplicar 2 + j 4 por 3 – j 5.

$$(2 + j\,4)\,(3 - j\,5) = 6 - j\,10 + \\ + j\,12 - j^2\,20 = 26 + j\,2$$

A divisão de dois vetores é determinada pela aplicação do princípio de racionalização, isto é, multiplicando os termos da divisão pelo conjugado do divisor:

Exemplo: Dividir 36 + j 12 por 8 – j 4.

$$\frac{36 + j12}{8 - j4} = \frac{36 + j12}{8 - j4} \text{ x } \frac{8 + j4}{8 + j4} =$$

$$= \frac{288 + j144 + j\,96 + j^2\,48}{64 - j^2\,16} =$$

$$= \frac{240 + j240}{80} = 3 + j3$$